MA1002-6: Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Daniel Remenik Z.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 2: Continuidad y Derivadas.

- *Recordar TVI y teorema de existencia de máximos y mínimos* !!

- *Continuidad* : - Sea f una función continua y biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ es una función continua.

  - Sea $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con $\mathcal{A}$ cerrado y acotado, entonces:

  f es uniformemente contínua $\Leftrightarrow$ f es contínua para cada $\overline{x} \in \mathcal{A}$.

- *Definición Derivada* : $f'(\overline{x}) = \lim\limits_{x \to \overline{x}} \dfrac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h}$.

- *Regla de la cadena* : Bajo ciertas hipótesis se cumple que $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$.

- *Derivadas conocidas* : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Problemas:

P1. Sea $f : [0,2a] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(2a)$, Pruebe que existen $x, y \in [0,2a]$ con $x - y = a$ tales que $f(x) = f(y)$.

P2. Sean $f, g : [a,b] \to [c,d]$ funciones continuas, tales que $f(a) = g(b) = c$.

Demuestre que $\exists \overline{x} \in [a,b]$, tal que $f(\overline{x}) = g(\overline{x})$.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x| \leq f(x)$. Considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $\mathcal{I} = [-y_0, y_0]$.

(a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{I}$: $f(x) > y_0$.

(b) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de $\mathcal{I}$.

P4. Estudie la continuidad uniforme en $(0,1)$ de las funciones:

(a) $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) $g(x) = e^x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

P5. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x) + x^{\operatorname{sen} x} + x^5 \cdot e^{\tan x}$.

(b) $g(x) = \arctan\Big(\operatorname{arcsen}(\frac{\ln 3x}{\cosh x})\Big)$.

(c) $h(x) = e^{-|x|}$. (Indicación: Analice los casos $x > 0$; $x = 0$ y $x < 0$).

P6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

1) $\forall a,b \in \mathbb{R} : f(a+b) = f(a) + f(b) + a^2 b + ab^2$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

(a) Demuestre que $f(0) = 0$ y que f es una función impar.

(b) Calcule $f'(0)$.

(c) Escriba la ecuación de la recta tangente y normal a la función $\varphi(x) = \Big(1 + f(x)\Big)^3$ en $x = 0$.

(d) Calcule $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ¿Es f una función necesariamente continua en todo $\mathbb{R}$?

(e) Calcule $f''(x)$ y $\Big(f' \circ f'\Big)'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

P7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable e impar.

Pruebe que f' es par y además que $f^{(2n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.