

## Auxiliar de Repaso Examen - Cálculo Diferencial e Integral

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Lunes 03 de Diciembre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez

Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

**Pregunta 1.** En un cuadrado de lado  $2a$  se inscriben dos circunferencias de radios  $r_1$  y  $r_2$ , centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado.

- a) Demuestre que  $r_1 + r_2 = \frac{4a}{2+\sqrt{2}}$
- b) Determine los valores de  $r_1$  y  $r_2$  de modo que la suma de las áreas de ambos círculos sea máxima. Justifique.

**Pregunta 2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt & \text{si } x \neq 0 \\ -2\alpha e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde  $\alpha = \int_0^1 e^{-z^2} dz$  es un valor conocido

- a) Pruebe que  $f$  es par, encuentre los ceros de  $f$  y estudie su continuidad para  $x \neq 0$
- b) Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = -2\alpha e$  y concluya que  $f$  es continua en  $x = 0$ .  
Indicación: Tome  $z = \sqrt{1+t}$
- c) Calcule  $f'(x)$  y  $f''(x)$  para  $x > 0$ , y estudie crecimiento y convexidad para  $x > 0$ .
- d) Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2e(\sqrt{\pi}/2 - \alpha)$ , sabiendo que  $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}/2$ .
- e) Bosqueje el gráfico de  $f$  en  $\mathbb{R}$ , indicando su recorrido, máximos y mínimos.

**Pregunta 3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Pruebe que si  $f$  es continua en 0, entonces  $F$  es continua en  $\mathbb{R}$
- b) Pruebe que si  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en 0, entonces  $F$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y además  $F'(0) = \frac{1}{2}f'(0)$

**Pregunta 4.** Se define la Espiral de Cornu (o también conocida como clotoide) a la curva definida de forma paramétrica como:

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du$$

Se le pide estudiar esta curva determinando: Los puntos donde es regular, su triedro de Frenet, la curvatura y radio de curvatura y su torsión.

**Pregunta 5.**

- a) Considere la serie de potencias  $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{ne^n}$ 
  - a.1) Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia, investigando los extremos.
  - a.2) Demuestre que  $f'(x) = \frac{1}{e-x}$
  - a.3) Determine  $f(x)$  y utilícelo para calcular  $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n2^n}$
- b) Recordando que  $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ , se pide:
  - b.1) Determinar las funciones  $f$  y  $g$  tales que sus series de potencia son:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} \quad g(x) = \sum_{n \geq 1} nx^n$$

**b.2)** Calcule el valor de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$$