Auxiliar 13 y Repaso Control 3 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 16 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias, indicando su especie:

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2}dx \qquad \int_1^\infty \frac{\sqrt[x]{e}-1}{x}dx$$

Pregunta 2. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} \text{ donde } a \geq 0 \text{ (debe separar los casos } a=0 \text{ y } a>0)$$

Pregunta 3.

a) Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$. Pruebe que las áreas dadas por: $A=$ área comprendida entre el el gráfico de f para $x\in(0,1]$ y el eje OX y $B=$ área comprendida entre el gráfico de f para $x\in[1,\infty)$ y el eje OX, son finitas y más aun, son iguales.

b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función decreciente y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

b.1) Pruebe que $\int_0^\infty |f'(x)|dx<\infty$

b.2) Pruebe que $\int_0^\infty f(x)\sin(3x)dx$ converge.

Pregunta 4.

a) Considere la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha(1-x^\beta)}}, \quad \alpha,\beta>0$$

Determine las condiciones que deben cumplir los parámetros α y β de modo que la integral converja.

b) Demuestre que $\forall a>1$:

$$\int_1^\infty a^{-x}dx<\infty$$

c) Sea $f:[1,\infty)\to(0,\infty)$ una función continua tal que:

$$\exists \lim_{x\to\infty}(f(x))^{1/x}<1$$

Demuestre que $\int_1^\infty f(x)dx$ converge. Concluya que $\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente.
<u>Indicación</u>: Note que si $\lim_{x\to\infty} g(x)<1$ entonces existe $a>1$ tal que $g(x)\leq\frac{1}{a}$ para x suficientemente grande.

Pregunta 5. Considere el gráfico de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ con $x\geq 1$. Si consideramos la superficie generada al rotar respecto al eje horizontal, se obtiene la llamada Trompeta de Torricelli (similar a una vuvuzela), se le pide:

a) Determinar el volúmen encerrado por la Trompeta

b) Determinar el área de la superficie de revolución

c) Suponga que llenamos la trompeta con la cantidad de pintura tal que cubra el volúmen determinado en a). En tal caso, tendríamos que una cantidad finita de pintura cubre una superficie infinita. ¿Cómo es esto es posible?.

Pregunta 6.

a) Calcule el largo de la curva definida por la función $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ entre 0 y a.

b) Sin realizar un cálculo explícito y considerando $a > 0$, determine el valor de:

$$J = \int_0^{2a} x\sqrt{a^2 - (x-a)^2}dx - \int_{-2a}^{2a} x\sqrt{4a^2 - x^2}dx$$

c) Sea Γ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Determine una fórmula para la longitud de Γ. Suponiendo que f es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ está dada por:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{3/2}}$$

Pregunta 7. Considere la curva Γ en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(\int_1^t \frac{\cos u}{u}du, \int_1^t \frac{\sin u}{u}du\right) \quad t \in [1, t_0)$$

Calcule el largo de la curva entre $t = 1$ y $t = t_0$. Sabiendo que $t = t_0$ es el primer instante mayor a 1 donde el vector tangente a la curva es vertical.

Pregunta 8. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Consideremos:

$$e_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \;\; e_\theta(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

definimos la curva Γ parametrizada por:

$$\gamma(\theta) = f(\theta)e_r(\theta) \quad \theta \in I$$

a) Pruebe que γ satisface $\gamma' = f'e_r + fe_\theta$. Deduzca que Γ es regular si y sólo si $(f(\theta), f'(\theta)) \neq (0, 0)$ para cada $\theta \in I$.

b) Determine $\hat{T}$ y $\hat{N}$ en cada punto regular de γ.

c) Pruebe que la curvatura en cualquier punto regular está dada por:

$$\kappa = \frac{f^2 + 2f' - ff''}{(f^2 + f'^2)^{3/2}}$$

además calcule la longitud de γ en un intervalo $[a, b] \subset I$.