Auxiliar 12 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 09 de Noviembre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, todo esto en coordenadas cilíndricas.
En la auxiliar pasada verificamos que una parametrización de esta trayectoria (que llamaremos Γ) está dada por:

$$\vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \cosh(\theta)) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Calcule el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de Γ.

Pregunta 2. Sea Γ la curva obtenida al intersectar el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ con la esfera unitaria.

a) Determine una parametrización para Γ
b) Calcule el triedro de Frenet para Γ
c) Suponiendo densidad $\rho(x, y, z) = x + y + z$ determine la masa y el centro de masa de Γ.

Pregunta 3. Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Supondremos que $\sigma \in \mathcal{C}^3$. Pruebe que:

a) $\tau(s) = [\vec{\sigma}'(s) \times \vec{\sigma}''(s)] \cdot \vec{\sigma}'''(s) / \|\vec{\sigma}''(s)\|$
b) Usando la parte anterior, pruebe que la torsión de la hélice $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 4\pi]$ es $1/2$.

Pregunta 4. Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad: existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que la circunferencia cumple esta propiedad). Sea $\vec{\sigma}(s) : [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización en longitud de arco de Γ.

a) Justifique la existencia de una función $\varphi : [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P_0 = \vec{\sigma}(s) + \varphi(s)\hat{N}(s)$$

b) Demuestre que se cumple:

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(s)\kappa(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y torsión de Γ respectivamente.
c) Concluya que Γ es una curva plana.
d) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

Pregunta 5. Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$ se tiene que $\kappa(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$. Diremos que Γ es una **hélice** de eje $\hat{e}$ y ángulo θ, si todos los vectores tangentes a Γ forman un ángulo θ con $\hat{e}$.

a) Pruebe que si Γ es una hélice entonces el vector $\hat{e}$ es una combinación lineal de $\hat{T}$ y $\hat{B}$. Calcule los coeficientes de esta combinación lineal.
b) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si $\kappa/\tau \equiv cte$. Exprese esta cantidad en función del ángulo θ de la hélice.