

Auxiliar 11 - Cálculo Diferencial e Integral

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Viernes 26 de Octubre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez

Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Calcular el área encerrada entre las cardioides

$$\rho = 2 + \sin(\theta), \quad \rho = 2 + 2 \sin(\theta)$$

Pregunta 2. Se define la Lemniscata (centrada en el origen) como la curva plana cuyos puntos satisfacen la siguiente propiedad:

$$P = (x, y) \text{ pertenece a la Lemniscata si y sólo si } d(P, (a, 0)) \cdot d(P, (-a, 0)) = a^2$$

Pruebe que en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva como:

$$\rho^2(\theta) = \begin{cases} 2a^2 \cos(2\theta) & \text{si } \theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pregunta 3.

- a) Demuestre que si S es el arco de la curva definida de forma paramétrica vía $y = \varphi(t)$ y $x = \psi(t)$, con $t \in [a, b]$, donde φ y ψ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$, entonces:

$$L(S) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

¿Cómo es en particular la expresión para una curva definida en coordenadas polares? Finalmente, recupere la fórmula de longitud de curva para una función $y = f(x)$.

- b) Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t} \cos(t)$, $y(t) = e^{2t} \sin(t)$. Encuentre el largo L de la curva obtenida al variar t entre 0 y 2π .
- c) Considerando la misma espiral, encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t , desde 0 a t_0 , sea igual a la mitad del largo L , obtenido en la parte anterior.

Pregunta 4. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, todo esto en coordenadas cilíndricas.

- a) Parametrice la trayectoria Γ descrita por la partícula.
Hint: Primero verifique que $\cosh(\theta)$ satisface la ecuación diferencial mencionada.
- b) Calcule la longitud de Γ si $\theta \in [0, 2\pi]$
- c) Calcule el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de Γ .

Pregunta 5. Sean $a, b, c > 0$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$, sea Γ la curva parametrizada por $\vec{r}: [0, 2\pi c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con:

$$\vec{r}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b\left(\frac{s}{c}\right) \right)$$

Muestre que s es la longitud de arco sobre Γ .

Pregunta 6. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de tal forma que su altura z y el ángulo θ en coordenadas cilíndricas cumple la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, \theta_0]$

- a) Encuentre una parametrización para Γ . Dibuje la curva.
- b) Calcule el largo de Γ . Estudie que ocurre si $\theta_0 \rightarrow \infty$.