Pauta Auxiliar 8 - Calc. Dif e Integral. - 2012/2

Prof: L. Sanchez Aux: M. Godoy

Antes de partir con los cálculos, repasemos algo muy importante, sabemos que en virtud del TFC sabemos que si f es continua en un intervalo I $\wedge$ $a \in I$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$ es derivable en $\text{int}(I)$ y más aun $G' = f$ en $\text{int}(I)$

Así, si consideramos h función dif: $h : [a,b] \to I$, entonces:

$$G(h(x)) = \int_a^{h(x)} f(t)dt \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_a^{h(x)} f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\Big(G(h(x))\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regla de} \\ \text{la cadena}}}{=} G'(h(x)) \cdot h'(x)$$

pero $G' = f$ en $\text{int}(I)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^{h(x)} f(t)dt\right) = f(h(x)) \cdot h'(x)}$ $(*)$

Usaremos esto ampliamente durante esta Auxiliar (y el resto del curso, por cierto)

P1 a) f continua en $\mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt$

notar que como f es continua (y sen y cos lo son, eso es conocido)

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\cos(t)dt \text{ y } \int_0^x f(t)\sin(t)dt \text{ son diferenciables}$$

Así, tiene sentido probar lo pedido, ie. que $g''(x) + g(x) = f(x)$

Calculemos $g'(x)$: $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt\right) - \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt\right)$

$$= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cancel{\sin(x)f(x)\cos(x)} + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt - \cancel{\cos(x)f(x)\sin(x)}$$

por $(*)$

$$\boxed{g'(x) = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt}$$

Notar que g' es diferenciable pues f es continua $\Rightarrow$ $\int_0^x f(t)\cos(t)dt$ y $\int_0^x f(t)\sin(t)dt$ son diferenciables

Calculemos ahora $g''(x)$:

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt\right)$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)f(x)\cos(x) + \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)dt + \operatorname{sen}(x)f(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$= \underbrace{-\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)dt}_{-g(x)} + f(x)(\underbrace{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}_{1})$$

$\therefore \quad g''(x) = -g(x) + f(x) \iff \boxed{g''(x) + g(x) = f(x)}$ como se deseaba.

Supongamos que $f(0)>0$, veamos que g posee mín local en $x=0$.

De lo recién mostrado $g''(0) + g(0) = f(0) > 0$

pero: $g(0) = \operatorname{sen}(0)\cdot\int_0^0 f(t)\operatorname{sen}(t)dt - \cos(0)\int_0^0 f(t)\operatorname{sen}(t)dt = 0$

$$\Rightarrow g''(0) = f(0) > 0.$$

Así, $x=0$ será mín local si $g'(0)=0$.

En efecto: $g'(0) = \cos(0)\int_0^0 f(t)\cos(t)dt + \operatorname{sen}(0)\int_0^0 f(t)\sin(t)dt = 0$

$\therefore$ en $x=0$: $g'(0)=0$ y $g''(0)=f(0)>0 \Rightarrow x=0$ es mín local.

b) Debemos det. los valores $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$ tq

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x}\right) = 1.$$

Notemos que este límite se debe calcular con L'Hopital (y que aplica pues la integral.)
$\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}$ es continuo al menos en $(-a,\infty) \Rightarrow$ es dif en ese intervalo
pues tenemos algo de la forma $\frac{0}{0}$

así: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt\right)}{bx-\sin x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt\right)}{\frac{d}{dx}(bx-\sin x)} \overset{\text{TFC}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x}}$

como $a>0$: $\sqrt{a+x}$ nunca es 0 si $x=0$
luego, para el límite de 1 es necesario
que $\boxed{b=1}$ (sino $(b-\cos x)\sqrt{a+x} \underset{x\to 0}{\not\to} 0$
y queda un límite igual a 0!)

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{a+x}}$ Forma $\frac{0}{0}$

$\underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen} x\sqrt{a+x} + (1-\cos x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+x}}}$ Forma $\frac{0}{0}$ de nuevo!

$\underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{2}{\cos x\sqrt{a+x} + \operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a+x}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a+x}}\cdot\operatorname{sen} x + (1-\cos x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(a+x)^{3/2}}}$

Como $a>0$, esta última expresión es evaluable en $x=0$! (Es continua en $x=0$)

$= \dfrac{2}{1\cdot\sqrt{a+0} + 0 + 0 + 0} = \dfrac{2}{\sqrt{a}} \overset{\text{Hipot}}{=} 1.$

$\Rightarrow 2 = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=4}$

$\therefore$ si $a=4$ y $b=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt\right)}{(bx-\sin x)} = 1 = \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{4+t}}\,dt\right)}{x-\sin x}$

P2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(0)=0$. $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ diferenciable.

$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(s))\,ds + f(x)$

g^{-1} continua $\Uparrow$ g biy y dif $\Rightarrow \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(s))\,ds$ es dif. por TFC

$\underbrace{f \text{ dif}}_{\Rightarrow f^2(g^{-1}(s)) \text{ cont}}$

a) Pdq: $f(x) = \tanh(g(x))$

Lo típico en estos casos es usar el TFC, derivando la expresión para estudiar si es posible determinar explícitamente g (o f)

En este caso, en virtud del TFC:

$$g'(x) = f^2(\underbrace{g^{-1}(g(x))}_{x \text{ pues } g \text{ biyect}}) \cdot g'(x) + f'(x)$$

$$g'(x) = f^2(x) \cdot g'(x) + f'(x) \iff g'(x)(1 - f^2(x)) = f'(x)$$

$$\iff \boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}}$$

Pero! notemos que $(\operatorname{arctgh}(f))' = \cancel{\ldots} = \dfrac{1}{(\operatorname{tgh})'(f)} \cdot f'(x)$

$$= \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}$$

Luego: $g'(x) = (\operatorname{arctgh}(f(x)))' \iff g(x) = \operatorname{arctgh}(f(x)) + C$

pero $g(0) = 0 = \operatorname{arctgh}(f(0)) + C \Rightarrow C = -\operatorname{arctgh}(f(0))$

$\uparrow$ hipot pero $f(x) = g(x) - \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(s))\,ds \Rightarrow f(0) = \underbrace{g(0)}_{0} - \underbrace{\int_0^{0} \_\_}_{0} = 0$ $\Rightarrow \operatorname{arctg}(0) = 0$

$\therefore\ g(x) = \operatorname{arctgh}(f(x)) \iff \boxed{f(x) = \operatorname{tgh}(g(x))}$ $\Rightarrow \boxed{C = 0}$

b) Calculemos ahora $\int_0^{x^3} (\operatorname{tgh}(t))^2\,dt$

basta identificar las cosas, primero: como $f(x) = \operatorname{tgh}(g(x))$ (por a))
$\Rightarrow f(g^{-1}(x)) = \operatorname{tgh}(x)$

Además: en este caso $g(x) = x^3$

y $g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(s))\,ds + f(x) \Rightarrow \boxed{\int_0^{\overset{g(x)}{\|}\ x^3} (\operatorname{tgh}(s))^2\,ds = x^3 - \operatorname{tgh}(x^3)}$.

P3 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua en $[0,1]$, dif en $(0,1)$, $f(0)=0$

$\forall x\in(0,1)$: $0\le f'(x)\le 1$. Veamos que $\forall x\in[0,1]$: $\int_0^x f^3(t)\le\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$.

__Sol.__ Tal como dice la indicación, analicemos una función adecuada

Sea $F(x):=\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$, si probamos que $F(x)\ge 0$ $\forall x\in[0,1]$ estamos listos.

Como $F(0)=\left(\int_0^0 f(t)dt\right)^2-\int_0^0 f^3(t)dt=0$, basta ver que F es creciente.

Calculemos $F'(x)$:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\right]-\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f^3(t)dt\right)=2\int_0^x f(t)dt\cdot\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)-f^3(x)\cancel{dx}$$

$$=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt-\frac{f^2(x)}{2}\right)$$

Como $f(0)=0\ \wedge\ f'(x)\ge 0\Rightarrow 2f(x)\ge 0\quad\forall x\in\overset{\text{continuidad}}{[0,1]}$

así, basta probar que $\underbrace{\left(\int_0^x f(t)dt-\frac{f^2(x)}{2}\right)}_{G(x)}\ge 0\quad\forall x\in[0,1]$.

Como $G(0)=0$, basta ver que $G'(\cancel{x})\ge 0$

En efecto: $G'(x)=f(x)-\frac{1}{2}\cdot 2f(x)f'(x)=\underbrace{f(x)}_{\ge 0}\underbrace{(1-f'(x))}_{\ge 0 \text{ por hipótesis}}\ge 0$

Luego G es creciente $\wedge\ G(0)=0\Rightarrow G(\cancel{x})\ge 0\Rightarrow F'(x)\ge 0$

$\Rightarrow F\uparrow$ y $F(0)=0\iff F(x)\ge 0\quad\forall x\in\overset{\text{continuidad}}{[0,1]}$

$\iff\int_0^x f^3(t)dt\le\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ como se deseaba.

P4 TVM deriv con $g>0 \Rightarrow$ TVMG para integrales:

TVM deriv: $\exists \xi \in (a,x)$ tq $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (f, g dibas su C^1, $g' \neq 0$)

TVM int: $\exists \xi \in [a,x]$ (f cont, g integ tq no cambia de signo)

$$\int_a^x fg = f(\xi)\int_a^x g.$$

TVM deriv con $g>0 \Rightarrow$ TVM int:

Consideremos $F(x) = \int_a^x fg$, notar que si f cont y g tb $\Rightarrow$ F dif. (TFC)

Sea tambien $G(x) = \int_a^x g$, dif si g es cont.

$\Rightarrow$ Por TVM deriv: $\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$ pero: $F(a) = G(a) = 0$

y $F'(\xi) \underset{TFC}{=} f(\xi)g(\xi)$

$G'(\xi) = g(\xi)$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_a^x fg - 0}{\int_a^x g - 0} = \frac{f(\xi)\cancel{g(\xi)}}{\cancel{g(\xi)}} \Leftrightarrow \int_a^x fg = f(\xi)\int_a^x g$$ que es el TVM integral :)

Veamos ahora que TVM int (suponiendo $f, g \in C^1$, $g'>0$) implica TVM deriv:

En efecto, Consideremos $F(x) = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (bien def, de hecho continuo pues $f, g \in C^1$ y $g'>0$)

$G(x) = g'(x) \Rightarrow G$ no cambia de signo. ($\Rightarrow g'$ no cambia de signo)

Luego, el TVMI dice: $\int_a^x F(s)G(s)ds = F(\xi)\int_a^x G(s)ds$

pero: $\int_a^x F(s)G(s)ds = \int_a^x \dfrac{f'(s)}{g'(s)}\cdot g'(s)\,ds = \int_a^x f'(s)ds = f(x)-f(a)$, $F(\xi) = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

y $\int_a^x G(s)ds = \int_a^x g'(s)ds = g(x)-g(a)$ $\therefore$ $f(x)-f(a) = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x)-g(a))$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ que es el TVM deriv. :)

P5 a) $\underbrace{\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx}_{I_n} = \int \underbrace{\operatorname{sen}^{n-1}(x)}_{u} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{v'}$

$v' \Rightarrow v = -\cos(x)$

$u \Rightarrow u' = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cdot\cos(x)$

$$\underset{IPP}{=} \operatorname{sen}^{n-1}(x)\circ(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\cdot(n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\operatorname{sen}^{n-1}(x) + \int (n-1)\underbrace{\cos^2(x)}_{1-\operatorname{sen}^2(x)}\operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)\Big(\underbrace{\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx}_{I_n}\Big)$$

$$\Rightarrow I_n = -\cos(x)\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{(n-1+1)}_{n} I_n = -\cos(x)\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}}$$ Lo pedido.

b) Basta tomar todo entre 0 y $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \underbrace{\cancel{-\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2}}}_{0} + \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx$$

($\cos x = 0$ en $\pi/2$ y $\operatorname{sen} x = 0$ en $x=0$)

c) Pdq: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}$

Sol. $I_{2n+1} = \frac{(2n+1-1)}{2n+1} I_{2n+1-2} = \frac{2n}{2n+1}\circ I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\circ\frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3}$

$$\underset{iterat.}{=} \frac{2n}{2n+1}\circ\frac{2(n-1)}{2n-1}\circ\frac{2(n-2)}{2n-3}\cdots\cdot I_1$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\frac{2i}{2i+1}\circ\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \prod_{i=1}^{n}\frac{2i}{2i+1}\circ\underbrace{(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}}_{1} = \prod_{i=1}^{n}\frac{2i}{2i+1}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2}(x)dx \cdot \frac{2n-1}{2n} \qquad \left(\underline{\text{Pdq}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i} \right)$$ 8/9

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4}$$

$$\underset{\substack{\text{iterat.}\\ \text{llego } (2n-2n=0)}}{=} \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot i} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0 (x)dx}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \right) \cdot \frac{\pi}{2}.$$ como se quería.

Concluyamos que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}(x)dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)dx} \qquad \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$$

En efecto, por un lado:

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \right) \quad \text{y} \quad I_{2n+1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \right)}{\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1} \right)} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1} \right) \cdot \left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \right)}{\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$ que es exactamente lo deseado (con notación de pitatoria para ahorrar espacio ☺)

d) $\underline{\text{Pdq}}$: $1 \le \dfrac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx} \le 1 + \dfrac{1}{2n}$

notar que en $[0, \pi/2]$ $|\operatorname{sen} x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \operatorname{sen}^{2n+1} x \le \operatorname{sen}^{2n} x \le \operatorname{sen}^{2n-1} x$

luego: $0 < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx$ / divido por $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx$ 9/9

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx} \le \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx}$$

pero $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx$

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx} \le \frac{\cancel{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx}}{\frac{2n}{2n+1}\cancel{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

para concluir basta ver que: De la parte anterior

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i-1} \le \frac{\pi}{2} = \left(\prod \frac{2i}{2i+1}\right)\left(\prod \frac{2i}{2i-1}\right) \underbrace{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}_{1 \le \ \le 1+\frac{1}{2n}} \le \left(\prod^{n} \frac{2i}{2i+1}\right)\left(\prod^{n} \frac{2i}{2i-1}\right)\cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{\frac{2n+1}{2n}}$$

$$= \left(\prod^{n-1} \frac{2i}{2i+1}\right)\frac{2\cancel{n}}{2\cancel{n+1}}\left(\prod^{n} \frac{2i}{2i-1}\right)\cdot \frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{2n}}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{2i+1}\right)\left(\prod^{n} \frac{2i}{2i-1}\right)$$

Osea:
$$\prod^{n} \frac{2i}{2i+1} \prod^{n} \frac{2i}{2i-1} \le \frac{\pi}{2} \le \prod^{n-1} \frac{2i}{2i+1} \cdot \prod_{2i-1}^{n} \frac{2i}{2i-1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$l \le \frac{\pi}{2} \le l$$

(converge la suc pues es monot y acot por $\pi/2$, y el lím de ambas es el mismo pues una era igual a la otra por $(1+\frac{1}{2n}) \to 1$)

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1} \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i-1} = \lim_{n\to\infty} \prod \frac{2i}{2i-1}\cdot\frac{2i}{2i+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

que era lo deseado :)