Pauta Auxiliar 7 - Calc. Dif. e Integral - 2012/2.

P1 a) $S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{n^2-i^2}$ La idea es siempre armar términos de la forma $\frac{i}{n}$ y dejar un $\frac{1}{n}$ (paso part)

a.1) $S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{n^2-i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{n^2-i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}\sqrt{\frac{n^2-i^2}{n^2}}$

$= \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{paso de la part!}}$ $\Rightarrow$ Part: $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n\}$

$|P| = \frac{1}{n}$.

$= \sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$ función: $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$\uparrow$ $i=0$ no aporta!

a.2) ¿$\lim_{n\to\infty} S_n$? Notar que $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ en $[0,1]$ es continua

$\Rightarrow$ es integrable

Luego: $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{(TFC)}{=} F(1) - F(0)$ con F primitiva de $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Calculemos la primitiva de $x\sqrt{1-x^2}$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{1-u}\,du \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2}\int\sqrt{v}\,dv = -\frac{1}{2}\int v^{1/2}\,dv$$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ $\quad$ $v = 1-u$, $dv = -du$

$= -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}v^{3/2} + C$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \overset{0}{\cancel{-\frac{1}{3}(1-1^2)^{3/2}}} - \left(-\frac{1}{3}(1-0^2)^{3/2}\right)$

$= \frac{1}{3}$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{n^2-i^2} = \frac{1}{3}$. □

b) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(n+i) - \ln(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \Rightarrow$ Particion $P = \{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\}$

Función $f(x) = \ln(1+x)$

notar que $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ es continua $\Rightarrow$ es integrable.

luego: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

pero: $\int \ln(1+x)\,dx = \int \ln(w)\,dw = \int \underbrace{\ln(w)}_{v}\cdot \underbrace{1}_{u'}\,dw = w\ln w - \underbrace{\int w\cdot\frac{1}{w}\,dw}_{w}$

$\Rightarrow u = w$

$v' = \frac{1}{w}$

$= w\ln w - w.$

$\Rightarrow \int \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - (1+x)$

$\therefore \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = (2\ln 2 - 2) - (1\cancel{\ln 1}^{\,0} - 1) = 2\ln 2 - 2 + 1$

$= 2\ln 2 - 1.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\ln 2 - 1.$

P2| f cont. en $[a,b]$, deriv. en (a,b) tq $\forall x \in (a,b)$ $|f'(x)| \leq K$, $K>0$.

a) Pdq. $\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$: $S(f,P) - s(f,P) \leq K|P|(b-a)$.

Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, estimemos $S(f,P)-s(f,P)$, por def: $(P = \{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\})$

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(f) - m_i(f)\right)(x_i - x_{i-1})$$

con $M_i(f) = \sup\limits_{x\in I_i} f(x)$, $m_i(f) = \inf\limits_{x\in I_i} f(x)$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})$$

Como f es continua $\Rightarrow$ alcanza sup e inf en I_i $\forall i$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in I_i} f(x) = f(\overline{x}_i) \wedge \inf\limits_{x\in I_i} f(x) = f(\underline{x}_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(\overline{x}_i) - f(\underline{x}_i)\right)(x_i - x_{i-1})$$

Como f es dif. en $[a,b]$ $\Rightarrow$ lo es en I_i $\forall i$ $\Rightarrow$ vale TVM: Hagámoslo para cada intervalo $[\underline{x}_i, \overline{x}_i]$

luego: $|f(\overline{x}_i) - f(\underline{x}_i)| = \underbrace{|f'(\xi_i)|}_{\substack{\leq K \\ \text{por hipot}}} \underbrace{|(\overline{x}_i - \underline{x}_i)|}_{\leq |P|}$ ¡siempre!

con $\xi_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$

$$\Rightarrow S(f,P) - s(f,P) \le \sum_{i=1}^{n} K|P|(x_i - x_{i-1}) = K|P| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{\text{Telescópica}} = K|P|(b-a).$$

lo deseado.

b) Concluir que f es integrable.

basta notar que se cumple la condición de Riemann

Sea $\varepsilon > 0$, probemos que $\exists\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tq $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

de la parte anterior:

$$S(f,P) - s(f,P) \le K(b-a)|P|,$$ luego basta tomar una partición P tq $|P| < \dfrac{\varepsilon}{K(b-a)}$ (lo cual siempre es posible, basta escoger partición equiesp. con n suf. grande (siempre $\exists$ por prop. arquimediana))

$$\Rightarrow S(f,P) - s(f,P) \le K(b-a)|P| \le K(b-a)\frac{\varepsilon}{K(b-a)} = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ es integrable en $[a,b]$.

c) Verifiquemos que:

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}: \left| \int_a^b f - \frac{1}{2}\big(S(f,P) + s(f,P)\big) \right| \le \frac{1}{2} K|P|(b-a).$$

Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, notemos que siempre es cierto que $\displaystyle\int_a^b f \le S(f,P)$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f - \frac{1}{2}\big(S(f,P) + s(f,P)\big) \right| \le \left| S(f,P) - \frac{1}{2}\big(S(f,P) - s(f,P)\big) \right|$$

$$= \left| \frac{2S(f,P) - S(f,P) - s(f,P)}{2} \right| = \left| \frac{S(f,P) - s(f,P)}{2} \right|$$

$$\underset{a)}{\le} \frac{1}{2} K|P|(b-a)$$

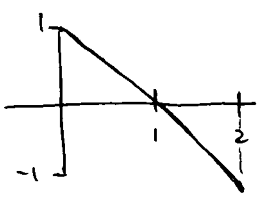
y se concluye lo deseado.

P3 a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x$ $\qquad$ f es integrable en $[0,2]$ pues es continua.

(En gral: Partic. equiesp. de n ptos de $[a,b]$: $P = \{(b-a)\frac{i}{n-1} + a \,;\, i = 0, \dots, n-1\}$)

Partición equiesp. de n términos: $P_n = \{0, \frac{2}{(n-1)}, \frac{4}{(n-1)}, \dots, \frac{2(n-2)}{(n-1)}, 2\}$
$= \{\frac{2i}{(n-1)},\ i = 0, \dots, n-1\}$.

grafiquemos f:



es de esperar que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$!

Probemos que la integral es 0:

Calculemos $S(f,P)$ y $s(f,P)$ (Notar que como f es int $\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} S(f,P) = \lim_{|P|\to 0} s(f,P)$)

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{x\in\left[\frac{2(i-1)}{n-1}, \frac{2i}{n-1}\right]} f(x) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{2}{(n-1)}}$$ pues es equisp.

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \inf_{x\in\left[\frac{2(i-1)}{n-1}, \frac{2i}{n-1}\right]} f(x) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{2}{n-1}}$$

notar que f es decreciente $\Rightarrow M_i(f) = f\left(\frac{2(i-1)}{n-1}\right)$, $m_i(f) = f\left(\frac{2i}{n-1}\right)$

Luego: $$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{2(i-1)}{n-1}\right)\frac{2}{n-1} = \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{2}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)$$

$$= 2 - \frac{2}{(n-1)}\sum_{j=0}^{n-2} j = 2 - \frac{2\cdot\cancel{2}}{(n-1)^{\cancel{2}}}\frac{(n-2)\cancel{(n-1)}}{\cancel{2}}$$

$$= 2\left(1 - \frac{(n-2)}{(n-1)}\right)$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{2i}{(n-1)}\right)\cdot\frac{2}{(n-1)} = \frac{2}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{2\cdot 2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$= 2 - \frac{\cancel{4}^{2}}{(n-1)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{n\cancel{(n-1)}}{\cancel{2}} = 2\left(1 - \frac{n}{(n-1)}\right)$$

Luego, se tiene: $$s(f,P) = 2\left(1 - \frac{n}{n-1}\right) \leq \int_0^2 f(x)dx \leq S(f,P) = 2\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\right)$$

Haciendo $n\to\infty$ (equiv. $|P|\to 0$) $\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{n}{n-1}\right)}_{0} \leq \int_0^2 f(x)dx \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\right)}_{0}$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx = 0.$$

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$, f int. Pdq f^2 es integrable en $[a,b]$.

Sol. Sea $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ Partición de $[a,b]$ cualquiera:

Probemos que se cumple la condición de Riemann, es decir:

$\forall \varepsilon>0\ \exists P\in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tq $S(f^2,P)-s(f^2,P)<\varepsilon$. Así pues, sea $\varepsilon>0$:

Comencemos por estimar $S(f^2,P)-s(f^2,P)$:

$$S(f^2,P)-s(f^2,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(f^2)-m_i(f^2)\right)(x_i-x_{i-1})$$

con $M_i(f^2)=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^2(x)$, $m_i(f^2)=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^2(x)$.

notemos que estas cantidades existen, pues como f es integ en $[a,b]$ $\Rightarrow f$ es acotada en $[a,b]$ $\Rightarrow f^2$ es acotada en $[a,b]$

en efecto:

: $0\leq m_i(f)\leq f(x)\leq M_i(f)$ en $[x_{i-1},x_i]$

$\Rightarrow \quad 0\leq m_i^2(f)\leq f^2(x)\leq M_i^2(f)$ en $[x_{i-1},x_i]$

Luego f^2 es, como dijimos, acotada en $[x_{i-1},x_i]$ $\forall i$.

Por otra parte, como $f(x)\geq 0:\ \forall x\in[x_{i-1},x_i]$: $M_i(f^2)=M_i^2(f)\wedge m_i(f^2)=m_i^2(f)$

$\therefore\ M_i(f^2)-m_i(f^2)=M_i^2(f)-m_i^2(f)=\left(M_i(f)+m_i(f)\right)\left(M_i(f)-m_i(f)\right)$

$$\therefore\ S(f^2,P)-s(f^2,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(f)-m_i(f)\right)\left(\underbrace{M_i(f)+m_i(f)}\right)(x_i-x_{i-1})$$

si logro acotar esto por algo indep. de i me queda justo $(S(f,P)-s(f,P))$!

Para acotar $M_i(f)+m_i(f)$ basta notar que, si $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ($<\infty$ pues f int $\Rightarrow f$ acot) (sup en todo $[a,b]$!) $\forall i$

$\Rightarrow\ m_i(f)\leq M_i(f)\leq M$

$\Rightarrow\ (M_i(f)+m_i(f))\leq 2M$

$$\therefore\ S(f^2,P)-s(f^2,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(f)-m_i(f)\right)\left(\underbrace{M_i(f)+m_i(f)}_{\leq 2M}\right)(x_i-x_{i-1})$$

$$\leq 2M\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(f)-m_i(f)\right)(x_i-x_{i-1})}_{S(f,P)-s(f,P)}=2M\left(S(f,P)-s(f,P)\right)$$

Y como f es integ., $\exists P$ partición de $[a,b]$ tq $S(f,P)-s(f,P)\leq\frac{\varepsilon}{2M}$

Luego, para esta partición: $S(f^2,P)-s(f^2,P)=2M(S(f,P)-s(f,P))\leq 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$

$\therefore$ se cumple cond. de Riemann $\Rightarrow f^2$ es integrable $\square$

P4 a) f creciente en $[0,1]$.

Pdq. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}$

Sol: notemos primero que: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f\left(\frac{i}{n}\right)}_{=M_i \text{ pues } f \text{ es crec.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{paso partición equiesp.}}$

Sea P_e = Part. equiesp. de $(n+1)$ ptos. $\Rightarrow I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$

$\Rightarrow \sum f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = S(f, P_e)$

Por otro lado, siempre se tiene que, $\forall P \in P_{[a,b]}$,

$s(f,P) \leq \int_0^1 f(x)dx$, en particular: $-\int_0^1 f(x)dx \leq -s(f,P_e)$

Luego: $\underbrace{S(f,P_e)}_{= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)} - \int_0^1 f(x)dx \leq S(f,P_e) - s(f,P_e)$

pero, como f es crec. $\Rightarrow m_i = \frac{i-1}{n}$

$\Rightarrow s(f,P_e) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$

$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{n=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right)}_{\text{Telescópica}} = \frac{1}{n}\left(f(1) - f(0)\right)$ que es lo deseado.

b) $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ no neg. y creciente.

b.1) $P = \{1,2,\dots,n\}$ Pdq. $\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i) \quad \forall n \geq 2$.

Sabemos que $s(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f,P)$, en nuestro caso:

$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \cdot \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=1\ \forall i} = \sum_{i=1}^{n-1} \inf_{x\in[i,i+1]} f(x) \underset{f \text{ crec.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$

y $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=1\ \forall i} = \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{x\in[i,i+1]} f(x) \underset{f \text{ crec}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^{n} f(i)$.

$\therefore \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i)$ como se deseaba.

b.2) Con $f(x)=\ln x$ concluir: $(n-1)! \leq n^n e^{-(n+1)} \leq n! \quad \forall n \geq 2$.

En efecto, de lo anterior:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) \leq \int_1^n \ln(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind.}}}{=} n\ln n - (n+1) \leq \sum_{i=2}^{n} \ln(i).$$

$$\ln(1\cdot 2 \cdots (n-1)) \leq \ln n^n - \ln\left(e^{-(n+1)}\right) \leq \ln(2\cdot 3 \cdots n)$$

$$\ln((n-1)!) \leq \ln\left(n^n \cdot e^{-(n+1)}\right) \leq \ln(n!)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \ln \text{ es fn } \uparrow}}{\Longrightarrow} \quad (n-1)! \leq n^n e^{-(n+1)} \leq n!$$

Que era lo deseado.

o tomar exp, que tb. es creciente