Auxiliar 7 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 28 de Septiembre, 2012

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Considere $s_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{n^2 - i^2}$

a.1) Identifique s_n como una suma de Riemann, determinando la función y partición involucradas.

a.2) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

b) Considere ahora $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i) - \ln(n)]$, realice el mismo desarrollo que en la parte anterior para esta nueva suma.

Pregunta 2. Consideremos f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $\forall x \in (a,b)$ se tiene: $|f'(x)| \leq K$ con $K > 0$ constante.

a) Pruebe que $\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$S(f,P) - s(f,P) \leq K|P|(b-a)$$

donde $|P|$ denota la norma de la partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, definida por $|P| = \max\{(x_i - x_{i-1}) : \ i = 1,\ldots,n\}$

b) A partir de lo anterior, concluya que f es integrable en $[a,b]$

c) Verifique que:

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} : \quad \left| \int_a^b f - \frac{1}{2}(S(f,P) + s(f,P)) \right| \leq \frac{1}{2}K|P|(b-a)$$

Pregunta 3.

a) Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x$. Indique por qué f es integrable en $[0,2]$. Calcule la suma superior e inferior asociada a f y una partición equiespaciada de $[0,2]$ de n términos. Deducir el valor de la integral $\int_0^2 f(x)dx$ sin usar el Teorema Fundamental del Cálculo.

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en que $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$ y f es integrable en $[a,b]$. Demuestre que $f^2(x)$ es integrable en $[a,b]$.

Pregunta 4.

a) Sea f una función creciente definida en $[0,1]$. Pruebe que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

b) Sea ahora f una función no negativa y creciente: $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$.

b.1) Usando la partición $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2$$

b.2) Considere $f(x) = \ln x$ y deduzca a partir de lo anterior que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1$$

<u>Indicación</u>: Será útil saber que $\int_1^n \ln(x)dx = n\ln(n) - (n+1)$