Pauta P4 Auxiliar 5 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 07 de Septiembre, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 4.

a) Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ hasta el orden 3, en torno a $x = 0$ y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$

Solución: Notemos que f está bien definida y es $\mathcal{C}^\infty$ en $(-\pi/2, \pi/2)$. Queremos calcular:

$$P_3^f(x) = f(0) + f'(0)x + 1/2f''(0)x^2 + 1/6f'''(0)x^3$$

pues es el polinomio de orden 3 entorno a $x_0 = 0$. Calculemos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$$

$$f''(x) = -\sec^2 x$$

$$f'''(x) = -2\sec x \cdot \sec' x = -2\sec x(\sec x \tan x) = -2\sec^2 x \tan x$$

esto último pues $\sec' x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan x$.
Por lo tanto:

$$P_3^f(x) = \ln(1) + (-\tan 0)x + \frac{1}{2}(-\sec 0)x^2 + \frac{1}{6}(-2\sec^2 0 \tan 0)x^3$$

luego, como $\ln(1) = 0,\ \tan 0 = 0, \sec 0 = 1$ entonces:

$$P_3^f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

más aun, por el Teorema de Taylor:

$$f(x) = P_3^f(x) + \frac{1}{4}f^{(4)}(\xi)x^4 \quad \xi \in (0, x)$$

es decir

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}f^{(4)}(\xi)x^4 \quad \xi \in (0, x)$$

siendo el resto la última expresión, para acotarlo primero calculemos $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))' = (-2\sec^2 x \tan x)' = -2[(\sec^2 x)' \tan x + \sec^2 x \cdot (\tan x)']$$

$$f^{(4)}(x) = -2[2\sec x \cdot \sec' x \cdot \tan x + \sec^2 x \cdot \sec^2 x]$$

$$f^{(4)}(x) = -2[2\sec^2 x \cdot \tan^2 x + \sec^4 x]$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x^4\right| = |x^4|\left|\frac{1}{4!} \cdot 2 \cdot \sec^2 \xi(2\tan^2 \xi + \sec^2 \xi)\right| \quad \xi \in (0, x)$$

luego:

$$\left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x^4\right| \leq |x|^4 \frac{2}{4!}|\sec^2 \xi| \cdot |2\tan^2 \xi + \sec^2 \xi| \leq |x|^4 \frac{1}{4!} \cdot (2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (2 \cdot 1 + (\sqrt{2})^2)) = \frac{2}{3}|x|^4$$

Que era la cota pedida, notar que acotamos la secante y la tangente debido a que:

$$\sup_{x \in (-\pi/4, \pi/4)} \tan x = 1 \qquad \sup_{x \in (-\pi/4, \pi/4)} \sec x = \sqrt{2}$$

b) Este problema está dedicado a determinar el cono de superficie mínima circunscrito a una esfera de radio $R > 0$ fijo. Para ello:

b.1) Considere la esfera de radio $R > 0$ y el cono de altura h y base circular de radio r circunscrito a la esfera. Pruebe que:

$$\frac{h - R}{R} = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r}$$

b.2) Determine las dimensiones del cono (h y r) tal que se cumpla la condición de poseer superficie (manto y base) mínima estando circunscrito a la esfera. Indique el valor de la superficie en tal caso.

Solución: Para b.1) basta ver el siguiente dibujo:

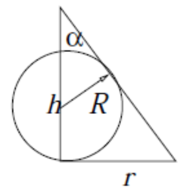

Figura 1: Esquema geométrico involucrado

de donde se tiene claramente, debido a la geometría asociada (la hipotenusa del triángulo es tangente a la circunferencia) que:

$$\sin\alpha = \frac{R}{h-R} = \frac{r}{g} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

de donde se concluye lo pedido.
Para b.2) notar que la superficie del cono (manto y tapa) vale:

$$S(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2} + \pi r^2$$

La ecuación de la parte anterior permite despejar r^2 en función de h, de donde se puede despejar (hagan el cálculo!) que:

$$r^2 = \frac{R^2 h}{h-2R}$$

por lo tanto, ahora la función a optimizar es, reemplazando r y r^2 en función de h:

$$S(h) = \pi R\frac{h^2}{h-2R}$$

Notar que S está definida en $(2R,\infty)$ (lo cual es consistente con la geometría del problema, pues la esfera está circunscrita al cono), más aun, es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables en ese intervalo. Calculemos la derivada:

$$S'(h) = \pi R\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2} = \pi R\frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2}$$

Notar, que de esta expresión se deduce que:
S' tiene punto crítico solo a $h=4R$, además $S'(h)>0$ si y solo si $h>4R$, y $S'(h)<0$ si y solo si $h\in(2R,4R)$.
Por lo tanto $S(h)$ decrece en $(2R,4R)$ y crece en $(4R,\infty)$. Por lo tanto se deduce que $h=4R$ es un punto donde S alcanza su mínimo global.
Finalmente, si $h=4R$ se tiene que $r = R\sqrt{\frac{4R}{4R-2R}} = \sqrt{2}R$, y por lo tanto la superficie asociada es:

$$S = \pi R\frac{16R^2}{4R-2R} = 8\pi R^2$$