**P2** a) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad h(x+y)=h(x)+h(y)$

Si $h$ es continua en $x=0 \Rightarrow h$ es continua $\forall x\in\mathbb{R}$.

__Dem.__ Notar primero que $h(0+0)=h(0)+h(0) \Rightarrow h(0)=2h(0) \Rightarrow \boxed{h(0)=0}$

Como $h$ es continua en $0 \Leftrightarrow \forall (x_n)$ suc. $(x_n)\to 0 \Rightarrow h(x_n)\to h(0)=0$.

Queremos probar que $h$ es continua para $x\in\mathbb{R}$ cualquiera, recordemos que eso es equivalente a probar que $\forall (x_n)\to x \Rightarrow h(x_n)\to h(x)$.

pero, si definimos $z_n = x_n - x \Rightarrow z_n \longrightarrow x-x=0$

y como $h$ es continua en $0$: $h(z_n) \longrightarrow h(0)=0$

$$h(z_n) = h(x_n - x) = h(x_n)-h(x)$$

$\left( x_n - x = x_n + (-x) \text{ y } h(-x)=-h(x). \text{ pues } h(0)=h(x)+h(-x) = h(x+(-x)) \right)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) - \overbrace{h(x)}^{\text{indep de } n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = h(x)$ $\therefore$ $h$ continua en $x\in\mathbb{R}$ cualquiera.

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & x>0,\ x\neq 1 \\ \alpha & x=1 \end{cases}$

b.1) Determinar $\alpha$ tq $f$ sea continua en $\mathbb{R}^+$

__Sol__: notar que $f$ es continua en $(0,1)\cup(1,\infty)$ pues es compos de fn continuas en esos intervalos

Luego, basta tomar $\alpha$ tq $f$ sea continua en $x=1$, equivalentemente,

Escoger $\alpha$ tal que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)=\alpha$, calculemos el límite:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x-1}$ forma $\frac{0}{0}$ de una función diferenciable!

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\ln x + 1}_{\text{continuo en } x=1} = \ln 1 + 1 = 0+1 = \boxed{1=\alpha}$$

6.2) Analizar la existencia de $f'(x)$ para $x>0$.

Cuando $x \neq 1$ la funcion es diferenciable por álg. de fn. dif $\Rightarrow$ si $x \neq 1$ $\exists f'$

para $x=1$ debemos verificarlo por definición:

Veamos si existe el sgte límite: (Que, en caso de existir, será $f'(1)$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)\ln(1+h)}{1+h-1} - \overset{(\alpha)}{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)\ln(1+h)}{h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{h^2} \text{ forma } \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) + \cancel{(1+h)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+h}} - \cancel{1}}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{2h} \text{ Forma } \frac{0}{0} \text{ de nuevo } \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \left.\frac{\frac{1}{1+h}}{2}\right) \text{continuo en } h=0 = \frac{1}{(1+0)2} = \boxed{\frac{1}{2} = f'(1)}$$

El límite existe y vale $\boxed{f'(1) = \frac{1}{2}}$

para $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln x}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\cdot(x\ln x)' - (x-1)'(x\ln x)}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(x-1)\cdot(\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}) - 1\cdot x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(\ln x + 1) - x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x\ln x} + x - \ln x - 1 - \cancel{x\ln x}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)^2} & x>0,\ x\neq 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \end{cases}$$

6.3) Continuidad de $f'(x)$

Por alg. de funciones continuas si $x \neq 1$ $f'$ es continua.

Veamos si en $x=1$ lo es, basta ver si $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)^2} \text{ Forma } \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{2x\,\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$\therefore$ $f'$ es continua en todo $\mathbb{R}^+$.

b.4) Queremos encontrar recurrencia para $f^{(n)}(1)$ (Se asume que $f$ es dif y continua en sus deriv en 1)

Usemos la fórmula de Leibniz para $(x-1)f(x) = x\ln x$

$\Rightarrow$ Rcdo: $(f\cdot g)^{(n)}_{(x)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}_{(x)} g^{(n-k)}_{(x)}$ $\qquad (x)' = 1$, $(x)^{(k)} = 0$ si $k \geq 2$.

así pues, por un lado: $(x\ln x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \ln x^{(n-k)}$

$$= \binom{n}{0} x^{(0)} (\ln x)^{(n)} + \binom{n}{1} x' (\ln x)^{(n-1)}$$

$$= 1\cdot x\cdot (\ln x)^{(n)} + n\cdot 1\cdot (\ln x)^{(n-1)}.$$

Por otro: $((x-1)f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (x-1)^{(k)} f^{(n-k)}_{(x)} \binom{n}{k}$ $\qquad$ pero $(x-1)^{(k)} = \begin{cases} (x-1) & k=0 \\ 1 & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}$

$$= \binom{n}{0}(x-1) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}\cdot 1\cdot f^{(n-1)}(x)$$

$$= (x-1) f^{(n)}(x) + n\cdot f^{(n-1)}(x)$$

$\therefore$ $(x-1) f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) = x(\ln x)^{(n)} + n(\ln x)^{(n-1)}$

pero $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{x^n}$ $\quad = \cancel{x}\cdot \dfrac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{x^{n-1}} + n\cdot \dfrac{(n-2)!\,(-1)^{n-2}}{x^{n-1}}$

$$(x-1) f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) = \frac{1}{x^{n-1}}\left[(-1)^{n-1}(n-1)! + n(n-2)!\,(-1)^{n-2}\right]$$

$$\underbrace{\cancel{(1-1)\cdot f^{(n)}}}_{0}(1) + n f^{(n-1)}(1) = \frac{1}{1^{n-1}}\left[(-1)^{n-1}(n-1)! + n(n-2)!\,(-1)^{n-2}\right]$$

$$\boxed{f^{(n-1)}(1) = \frac{1}{n}\left[(-1)^{n-1}(n-1)! + n(n-2)!\,(-1)^{n-2}\right]}$$

c) $f(x) = ax^{2n+1} + bx^{2m+1} - 1 \quad n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \; a, b > 0.$

$\exists$ de sol: Notar que $f$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(0) = -1$ y como $a, b > 0$ y $n, m$ pot. posit

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$

$\Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists x > 0$ tq $f(x) > M$ (en particular $f(x) > 0$)

$\therefore$ Por TVI $\exists \bar{x} > 0$ tq $f(\bar{x}) = 0$.

¿Sol única? Notar que $f'(x) = (2n+1)\cdot a x^{2n} + (2m+1)\, b \cdot x^{2m} > 0 \; \forall x$ pues $n, m$ son enteros y $a, b > 0$

$\Rightarrow f$ es estrict. creciente en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es inyectiva

$\Rightarrow \exists!$ solución.

**P3** | $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ var acot $\Leftrightarrow \forall (t_i)_{i=1}^{n} \subset [a,b]$ tq $= a < t_2 < \ldots < t_n = b \; \exists M \geq 0$ tq $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_i)| \leq M$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont y deriv en $[a,b]$, $f'$ acotada en $[a,b] \Rightarrow f$ var acotada.

Dem. Sea $(t_i)_{i=1}^{n} \subset [a,b]$ cualquiera tq $t_1 = a < t_2 < \ldots < t_n = b$.

Debemos probar que $\exists M \geq 0$ tq: $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq M$

$\Leftrightarrow |f(t_1) - f(t_0)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \ldots + |f(t_{n-1}) - f(t_n)| \leq M.$

Hagamos TVM en $(t_{i-1}, t_i)$: $\dfrac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'(\xi_i) \qquad \xi_i \in \{1, \ldots, n\}$

$\Leftrightarrow |f(t_i) - f(t_{i-1})| = |t_i - t_{i-1}|\, \underbrace{|f'(\xi_i)|}_{\leq C} \quad \forall i$ pues $f'$ acotada

Luego: $\underbrace{|f(t_1) - f(t_0)|}_{\leq |t_1 - t_0|\cdot C} + \underbrace{|f(t_2) - f(t_1)|}_{\leq |t_2 - t_1|\cdot C} + \ldots + \underbrace{|f(t_{n-1}) - f(t_n)|}_{\leq |t_n - t_{n-1}|\cdot C} \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| \cdot C$

$\leq \underbrace{n \cdot \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |t_i - t_{i-1}| \cdot C}_{M}$

$\therefore f$ es de Var. acotada :)

b) Hagamos TVMG a $\frac{f(x)}{x}$ y $\frac{1}{x}$

TVMG: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ $c \in (a,b)$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

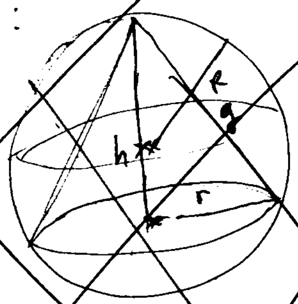
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{cf'(c)-f(c)}{\cancel{c^2}}}{-\frac{1}{\cancel{c^2}}} = f(c)-cf'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{af(b)-bf(a)}{\cancel{ab}}}{\frac{a-b}{\cancel{ab}}} = f(c)-cf'(c) \Rightarrow \boxed{\frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = f(c)-cf'(c)}$$

lo deseado.

P4 b) ~~idea~~:

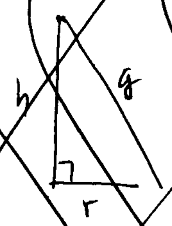



Superficie cono = Superf. manto + Superf tapa

$= \pi r g + \pi r^2$

$= \pi r\sqrt{r^2+h^2} + \pi r^2$

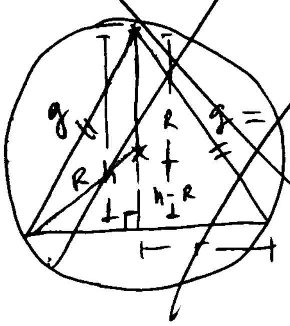
$= \pi\left(r\sqrt{r^2+h^2} + r^2\right)$




$\Rightarrow g^2 = r^2+h^2$

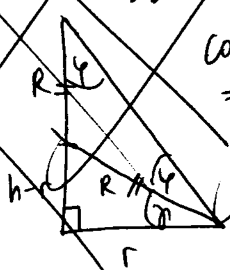
b.1) Pdq: $\frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}$

Sol: Por la simetría del volumen, basta ver un "corte plano"




$g = \sqrt{r^2+h^2}$ $\Rightarrow$

notar que:




como es $\Delta$ es rect

$\Rightarrow \varphi + \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\Rightarrow 2\varphi + \gamma = \frac{\pi}{2}$

$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$

$\Rightarrow$