Auxiliar 4 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 31 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sinh x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0 se pide determinar, justificando, el valor de $g(0)$ y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$.

b) Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^\infty(0, L)$ que satisface la siguiente ecuación:

$$f'' + f' - f = 0$$

para $x \in (0, L)$. Suponga que $f(0) = f(L) = 0$. Pruebe que $f \equiv 0$ en $[0, L]$.

Pregunta 2.

a) Un triángulo isósceles se inscribe en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, con vértice en $(a, 0)$ y base paralela al eje OY. Determine la altura del triángulo de área máxima y calcule dicha área.

b) Una persona que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular de diámetro 4 km. desea llegar a un punto C diametralmente opuesto a A en el otro lado del lago. La persona puede caminar a una velocidad constante de 4 Km/h y remar en un bote a una velocidad constante de $2Km/h$.

b.1) Plantee la ecuación $T = T(x)$ con $0 \leq x \leq \pi/2$ que describe el tiempo T que demora la persona en recorrer el tramo recto AB (remando) más el arco BC (caminando) en función del ángulo x.

b.2) Estudiar crecimiento y concavidades de $T(x)$, bosquejar su gráfico y demostrar que $T(x)$ admite un máximo absoluto, calcúlelo.

b.3) Determine el valor de x para llegar al punto C en el mínimo tiempo , indicando la trayectoria a seguir y en que tiempo se cubre el recorrido.

Pregunta 3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = -xf(x), \quad g'(x) = xg(x), \quad f(0) = g(0) = 1$$

a) Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.

c) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un $\xi \in (0, x)$ tal que $f(x) = -f''(\xi)$

e) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.

f) Deduzca que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir de todos los pasos anteriores.

Pregunta 4.

a) Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ hasta el orden 3, en torno a $x = 0$ y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$

b) Sea $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$. Pruebe que $\forall x \in (a, b)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$