Auxiliar 3 - Cálculo Diferencial e Integral

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Viernes 24 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez

Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

- La función $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es continua en $x = 0$, esto lo vimos en la Auxiliar 1, pruebe que sin embargo, esta función no es diferenciable en $x = 0$. Explique bajo un argumento geométrico porque ocurre esto. ¿Qué ocurre si cambia $x \sin(1/x)$ por $x^2 \sin(1/x)$?
- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $x = 0$ y tal que $f(x + y) = f(x)f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es derivable en todo punto y que $f'(x_0) = f'(0)f(x_0)$.
- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a , dado $n \in \mathbb{N}$ calcule:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$$

Pregunta 2. Verifique que la derivada de $f(x) = \arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ es nula en $[0, 1]$

Pregunta 3. Una función f se dice Lipschitz de orden α en x si existe una constante C tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

para todo y en un intervalo alrededor de x (note que este puede ser pequeño). La función f se dice Lipschitz de orden α en un intervalo si la desigualdad vale para todo x, y en tal intervalo. Se pide probar que:

- Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x , entonces f es continua en x .
- Si f es diferenciable en x , entonces es Lipschitz de orden 1 en x . ¿Es cierta la recíproca?
- Si f es diferenciable en $[a, b]$, ¿Es Lipschitz de orden 1 en $[a, b]$?
- Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a, b]$, entonces f es constante en $[a, b]$.

Pregunta 4. Usando el Teorema del Valor Medio pruebe las siguientes desigualdades:

- $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x \geq 0$.
- $x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x$, para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Indicación: Considere $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$.

Pregunta 5. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sinh x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0 se pide determinar, justificando, el valor de $g(0)$ y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$.