

P3] Antes de resolver los problemas notemos que hay 2 formas de probar que una función no es unif. cont. en un intervalo dado:

1) Por contradicción (como haremos en a))

2) Directamente: Es decir, probaremos que la def. de no ser unif. continua se cumple

Para esto último recordemos que:

$$f \text{ unif. cont. en } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } |x - y| < \delta, x, y \in A \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$f \text{ no es unif. cont. en } A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists \text{ sucesiones } (x_n), (y_n) \text{ en } A \text{ tq}$$

$$|x_n - y_n| < \delta_n \text{ (por ej. } \frac{1}{n} = \delta_n) \text{ tq } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Es decir, es suficiente encontrar sucesiones en A que vayan a un mismo

límite ~~pero~~ (o incluso que diverjan, pero que estén siempre "cerca")

y que satisfagan $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ (o, en términos simples

$$|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow l > \varepsilon)$$

a) $f(x) = x^2$: Esta función es continua en $\mathbb{R}$ lo es en $[0, 1]$, más aún, sabemos que 0 es unif. cont. en $[0, 1]$.

Sabemos que 0 es unif. cont. en $\mathbb{R}$: lo haremos por contradicción.

$$f(x) = x^2 \text{ no es unif. cont. en } \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tq}$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon \quad (*)$$

La propiedad arquimediática me asegura la existencia de n tq $n > 1/\delta$

$$\text{elijamos } y = n, \quad x = n + \frac{1}{2}\delta \Rightarrow x - y = \frac{1}{2}\delta < \delta \Rightarrow x^2 - y^2 < \varepsilon \text{ por } (*)$$

$$\text{Pero: } 1 < n\delta < n\delta + \delta^2 = n^2 + n\delta + \frac{\delta^2}{4} - n^2 = \left(n + \frac{\delta}{2}\right)^2 - n^2 \\ = x^2 - y^2 < \varepsilon$$

$\Rightarrow \exists \eta < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ contradicción

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x^2$ no es unif. continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln x$ no es unif. cont. en $(0,1)$.

Lo haremos vía sucesiones:

Sea $x_n := e^{-n}$ sucesión en $(0,1)$ $y_n := e^{-(n+1)}$ suc. en $(0,1)$
 $n \geq 1$

Como $x_n, y_n \rightarrow 0$, $\exists \tilde{n} \forall n \geq \tilde{n} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$

y por otra parte: $f(x_n) = \ln(e^{-n}) = -n$

$f(y_n) = \ln(e^{-(n+1)}) = -(n+1)$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| = |-n + (n+1)| = |1| = 1 \quad \forall n.$$

$\therefore f$ no puede ser unif. cont. en $(0,1)$.

c) $f(x) = x \sin x$ no es unif. cont. en $(0, +\infty)$

También por sucesiones:

Sea $x_n = 2n\pi$ $y_n = 2n\pi + \frac{1}{2n}$ sucesiones en $(0, +\infty)$

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

Estas sucesiones son obviamente divergentes, pero:

que es lo que nos interesa

y por otra parte:

$$f(x_n) = 2n\pi \sin(2n\pi) \quad f(y_n) = (2n\pi + \frac{1}{2n}) \sin(2n\pi + \frac{1}{2n})$$

$$\text{Notar que: } \sin(2n\pi + \frac{1}{2n}) = \sin(2n\pi) \cos(\frac{1}{2n}) + \sin(\frac{1}{2n}) \cos(2n\pi) = \sin(\frac{1}{2n})$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| = |2n\pi (\sin(2n\pi) - \sin(\frac{1}{2n})) - \sin(\frac{1}{2n})| = \underbrace{\frac{1}{2n} \sin(\frac{1}{2n})}_{\text{nula}} \xrightarrow{\text{acot.}} 0$$

$$= |2n\pi \sin(\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2n} \sin(\frac{1}{2n})| \rightarrow 2\pi > 0 \quad \text{E si } \varepsilon \text{ chico.}$$

$$\downarrow \quad \text{no}$$

$\therefore f$ no es unif. cont. en $(0, \infty)$.

P4) La haremos en la Aux 3. $\therefore$