

2º) Probamos que, efectivamente $x_n \rightarrow l$.

O sea, debemos probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k |x_n - l| < \varepsilon$

Sabemos que $x_{2n} \rightarrow l$ y $x_{2n+1} \rightarrow l$.

O sea, que la que de índices pares e impares (o sea todos) van hacia l , ¿cómo formalizar lo que parece evidente?

Notar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq k_1 |x_{2n} - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq k_1, n \text{ par } |x_n - l| < \varepsilon$

Análogamente

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq k_2, n \text{ impar } |x_n - l| < \varepsilon$

O sea si tomo $k = \max\{k_1, k_2\}$ (Para que se cumplan ambas afirm.)
 para $n \geq k$

Tengo que $\forall \varepsilon > 0 \exists k = \max\{k_1, k_2\} \forall n \geq k |x_n - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ o.o. $(x_n)_n$ es convergente.

PZ/ Vía caract. ε - δ : Probar que

a) $\frac{1}{x}$ es continua en $x = \frac{1}{2}$

Debemos probar que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - \frac{1}{2}| < \delta$
 $\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$.

notemos que: $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{1-2x}{x} \right| = 2 \left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{2}{|x|} \left| x - \frac{1}{2} \right|$

Si queremos que esa cantidad sea $< \varepsilon$ Debemos primero poder controlar $\frac{2}{|x|}$ (pues si $x \rightarrow 0$ eso diverge)

Así pues, basta (para acotar $\frac{2}{|x|}$) tomar $\delta < \frac{1}{2}$ (p.e. $\delta = \frac{1}{4}$) para
 en tal caso $|x - \frac{1}{2}| < \delta = \frac{1}{4} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$

$\Rightarrow$ Si $\delta = \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| \leq \frac{2}{|x|} \left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{2}{\frac{1}{4}} \left| x - \frac{1}{2} \right| = 8 \left| x - \frac{1}{2} \right|$

O sea. Tomando ahora $\delta < \frac{\varepsilon}{8} : \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$. Finalmente para tener ambas condic. tomamos $\delta = \min\left\{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8} \right\}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ es continua en $x=0$.

Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq si $|x-0| < \delta$
 $\Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq si $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

En efecto:
 $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ acot por 1
 $\Rightarrow |x| \leq |x|$ quito

luego, basta tomar $\delta = \varepsilon$

pues, si $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

f es continua en $x=0$.

P3) $f(x) = \begin{cases} |x|^p (1-e^x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a) f es cont. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

Basta notar que, si $x \neq 0 \Rightarrow |x|^p$ es cont $\forall p \in \mathbb{R}$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es cont (comp de fn cont)
 $\Rightarrow f$ es continua al ser prod de fn continuas. (Esto esto, con $x \neq 0$)

b) Si $p > -1 \Rightarrow f$ es continua en $x=0$

Probamos la continuidad por sucesiones, es decir, $\forall (x_n) \rightarrow 0$

Pdg: $f(x_n) \rightarrow f(0) = 0$.

En efecto, primero notemos que $p > -1 \Leftrightarrow p = -1 + \alpha$
 $\alpha > 0$.

Así pues: $f(x) = |x|^{\alpha} (1 - e^x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \rightarrow 0$: $f(x_n) = \frac{1}{|x_n|} |x_n|^{\alpha} (1 - e^{x_n}) \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$

$= \frac{(1 - e^{x_n})}{|x_n|} |x_n|^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{|x|} = -1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{x_n}}{|x_n|} \right) \cdot \underbrace{|x_n|^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{\substack{\text{está acotada} \\ \text{por } 1}} \rightarrow (-1) \cdot 0 = 0$

$\rightarrow 0$ (resultado conocido!)

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \rightarrow 0 \quad \forall (x_n) \text{ suc. } x_n \rightarrow 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f$ es continua en $x=0 \quad \forall \beta > -1$.

c) Si $\beta = -1$, f no es continua en $x=0$. Hint: $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$

$f(x) = \frac{1}{|x|} (1 - e^x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$

Veremos que para la suc. (x_n) dada $f(x_n) \not\rightarrow f(0) = 0$.

$f(x_n) = \frac{1}{|x_n|} (1 - e^{x_n}) \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}} \cdot (1 - e^{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}}) \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}}\right)$

$= (2n\pi + \pi/2) \cdot (1 - e^{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}}) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}}\right)}_{= 1 \quad \forall n}$

$= -1 \neq 0$

Cont. en $x=0$ $\square$

P4) "Módulo de continuidad"

$$\omega_f(c, \delta) = \sup \{ |f(x) - f(c)| : |x - c| < \delta \} \quad \omega_f(c) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(c, \delta)$$

Pda f es cont. en $x=c \Leftrightarrow \omega_f(c) = 0$.

($\Rightarrow$) Como f es cont. en $x=c$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ si $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Es decir, dado $\varepsilon > 0$: $\omega_f(c, \delta) < \varepsilon$
(≥ 0 por def)

además, como si $\delta_1 > \delta_2$: $\omega_f(c, \delta_1) > \omega_f(c, \delta_2)$

°.°. Dado $\varepsilon > 0 \exists \delta_1, \delta_2$ si $\delta < \delta_1 \Rightarrow \omega_f(c, \delta) < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(c, \delta) = \omega_f(c) = 0. \quad \checkmark$$

($\Leftarrow$) Sup. que $\omega_f(c) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(c, \delta) = 0$. Pda f es cont. en $x=c$.

En efecto: $\omega_f(c) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ si $|x-c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \sup \{ |f(x) - f(c)| : |x-c| < \delta \} < \varepsilon$$

Es decir, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ si $|x-c| < \delta$:

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

$$\text{i.e. } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

i.e. f es continua en $x=c$ $\checkmark$