Auxiliar 2 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 16 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Sean $f, g : [a, b] \to [a, b]$ funciones continuas y sobreyectivas. Demuestre que $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$. Concluya que la existencia de puntos fijos para f es decir, que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

b) Sean f, g funciones continuas en $[a, b]$ con $a < b$, tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(b-x)^n$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$

c) Demuestre que la ecuación $\exp(x) \cdot \cos(x) + 1 = 0$ posee infinitas soluciones, para ello analice la función en los intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ con $k \in \mathbb{N}$.

Pregunta 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica, demuestre que esta alcanza su supremo e ínfimo y además es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Pregunta 3.

a) Pruebe que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0, 1]$ pero no lo es en $\mathbb{R}$.

b) Pruebe que $f(x) = \ln x$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

c) Pruebe que $f(x) = x \sin x$ no es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

Pregunta 4.

a) La función $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es continua en $x = 0$, esto lo vimos en la auxiliar anterior, pruebe que sin embargo, esta función no es diferenciable en $x = 0$. Explique bajo un argumento geométrico porque ocurre esto. ¿Qué ocurre si cambia $x \sin(1/x)$ por $x^2 \sin(1/x)$?.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x = 0$ y tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es derivable en todo punto y que $f'(x_0) = f'(0)f(x_0)$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en a, dado $n \in \mathbb{N}$ calcule:

$$\lim_{x \to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$$