

Auxiliar 1 - Cálculo Diferencial e Integral

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Viernes 10 de Agosto, 2012

Profesor de Cátedra: Leonardo Sánchez

Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea $(x_n)_n$ una sucesión tal que las subsucesiones $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$ y $(x_{3n})_n$ son convergentes. Demuestre que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente.

Pregunta 2. Usando la definición $\epsilon - \delta$ de continuidad pruebe que:

- La función $f(x) = 1/x$ es continua en $x = 1/2$.
- La función $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es continua en $x = 0$.

Pregunta 3. Considere la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta (1 - e^x) \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Justifique porque f es continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$
- Pruebe que si $\beta > -1$, entonces f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$
- Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique.

Pregunta 4. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, definimos el llamado módulo de continuidad de f , denotado por $w_f(c, \delta)$ por:

$$w_f(c, \delta) = \sup\{|f(x) - f(c)| : x \in \mathbb{R}, |x - c| < \delta\} \quad \text{y} \quad w_f(c) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(c, \delta)$$

Pruebe que f es continua en c si y solo si $w_f(c) = 0$.

Pregunta 5.

- Sean $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ funciones continuas y sobreyectivas. Demuestre que $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$. Concluya que la existencia de puntos fijos para f es decir, que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.
- Sean f, g funciones continuas en $[a, b]$ con $a < b$, tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(b-x)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$