Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Prof.: José Correa H., Roberto Cominetti C.
Aux.: Sebastián Barbieri Lemp, Alberto Vera Azócar

Teoría de Juegos - Clase Auxiliar 13
Juegos Cooperativos

20 de noviembre de 2012

Problema 1 [Juego de Conexión].- Un conjunto N de jugadores quieren conectarse a la red eléctrica, esto lo valoran en $u_i > 0$. Sea $G = (N \cup \{f\}, E)$, donde f origina el servicio. Cada $e \in E$ tiene un costo de habilitación $c_e \geq 0$. El costo de una coalición $s \subseteq N$ es el de conectar a dicho conjunto con f.

1. Explicite la función $v(\cdot)$ para este juego. Suponga que si una coalición decide costear el servicio por si sola no pueden pasar por los nodos de otros jugadores.
2. Muestre que el core es no vacío.
3. Considere $\xi(i, s)$ donde cada jugador hace un pago por cada arco que ocupa para estar conectado con f y estos pagos disminuyen con la cantidad de jugadores que los ocupen. Formalice ξ y muestre que es un esquema de repartición 1-balanceado y con monotonía cruzada.

Problema 2 [Remate Combinatorial].- Considere una instancia de un remate combinatorial, donde cada jugador i cumple que $\exists\ a_i^\star \subseteq M$ tal que $v_i(a) = 1$ si a intersecta a $a_i^\star$ y $v_i(a) = 0$ en caso contrario. Pruebe que existe un equilibrio de Walras y proponga un algoritmo polinomial para encontrarlo.
Indicación: Se sabe que se puede resolver el problema de matching perfecto en un grafo bipartito de forma eficiente.

Problema 3 [Estimando la Balanceabilidad].- Considere una instancia $(N, v(\cdot))$ de utilidades transferibles con v sub-aditiva, i.e. $v(s \cup t) \leq v(s) + v(t)$ para todo s, t disjuntos. Considere el problema dual (D) y muestre que su mínimo con restricciones de integralidad $y_s \in \{0, 1\}$ es $v(N)$.

$$
\begin{aligned}
(D) \quad \text{mín} \quad & \sum_{s \subseteq N} v(s) y_s \\
s.a. \quad & \sum_{s \ni i} y_s = 1 \quad \forall i \in N \\
& y_s \geq 0 \quad \forall s \subseteq N
\end{aligned}
$$

Problema 4 [Monotonía Cruzada].- Considere el juego $(N, v(\cdot))$ y sea ξ repartición de costos γ-balanceada y con monotonía cruzada. Muestre que el γ-core de este juego es no-vacío.

Problema 5 [Contraejemplo] .- Estudiemos la siguiente instancia de Facility Location: hay $m + k$ jugadores, denotados $a_1, \cdots, a_m, a'_1, \cdots, a'_k$ y m fábricas $f_1, \cdots, f_m$ con costo de apertura de 3. La distancia entre f_i y a_i es 1 para todo i, la distancia entre f_i y a'_j es 1 para todo i, j y las demás distancias se obtienen por desigualdad triangular.
Muestre que si $m = \omega(k)$, entonces la solución óptima tiene costo $3m + o(m)$.