Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Prof.: José Correa H., Roberto Cominetti C.
Aux.: Sebastián Barbieri Lemp, Alberto Vera Azócar

Teoría de Juegos - Clase Auxiliar 14
Repaso para examen

4 de diciembre de 2012

Problema 1 [Contraejemplo] .- Estudiemos la siguiente instancia de Facility Location: hay $m+k$ jugadores, denotados $a_1, \cdots, a_m, a'_1, \cdots, a'_k$ y m fábricas $f_1, \cdots, f_m$ con costo de apertura de 3. La distancia entre f_i y a_i es 1 para todo i, la distancia entre f_i y a'_j es 1 para todo i, j y las demás distancias se obtienen por desigualdad triangular.
Muestre que si $m = \omega(k)$, entonces la solución óptima tiene costo $3m + o(m)$.

Problema 2 [Juego Monoparamétrico].- Considere una instancia de n jugadores donde se debe elegir una acción $a \in A$. Diremos que el jugador i es monoparamétrico si $\exists\, W_i \subseteq A$ tal que $v_i(a) = v_i^\star\ \forall a \in W_i$ y $v_i(a) = 0\ \forall a \notin W_i$, con algún $v_i^\star \in \mathbb{R}$. Asumiremos que todos los jugadores son monoparamétricos.
Sea (f, p) un mecanismo directo, diremos que f es monótona en i si

$$f(v) \in W_i \Rightarrow f(v'_i, v_{-i}) \in W_i\ \forall\, v'_i \geq v_i$$

y que el mecanismo es normalizado si $f(v) \notin W_i \Rightarrow p_i(v) = 0$.
Demuestre que un mecanismo normalizado es compatible en incentivos ssi para todo i f es monótona en i y

$$f(v) \in W_i \Rightarrow p_i(v) = \sup\{v'_i : f(v'_i, v_{-i}) \notin W_i\}$$

Problema 3 [Regulación de Monopolio].- Un monopolio enfrenta una curva de demanda $h(q) = 1 - q$ y su costo es $c(q) = \theta q$, con $\theta \sim F$ que es información privada con soporte en $[0,1]$ (asuma que la v.a. es absolutamente continua). El Estado diseña un mecanismo donde determina la cantidad $q(\theta)$ que produce el monopolio y el subsidio $p(\theta)$ que le da.

1. Escriba las funciones de utilidad $u(\theta', \theta)$ y $V(\theta)$ del monopolio.

2. El objetivo del Estado es maximizar $\mathbb{E}[q(\theta)\frac{1-q(\theta)}{2} - p(\theta) + \alpha u(\theta, \theta)]$, algún $\alpha \in (0,1)$. Interprete la función objetivo y escriba el problema que debe resolver el Estado, asumiendo que le interesa compatibilidad de insentivos y participación voluntaria.

3. Demuestre que un mecanismo compatible en incentivos cumple

$$\begin{aligned} q(\theta) & \quad \text{no-creciente} & (1)\\ V(\theta) &= V(1) + \int_\theta^1 q(s)ds & (2)\\ p(\theta) &= V(1) + \int_\theta^1 q(s)ds - (1 - q(\theta) - \theta)q(\theta) & (3) \end{aligned}$$

4. Pruebe que las condiciones anteriores implican compatibilidad de incentivos. Reescriba el problema de forma que no dependa de dos funciones.

Problema 4 [Remate Combinatorial].- Considere una instancia de un remate combinatorial, donde cada jugador i cumple que $\exists\ a_i^\star \subseteq M$ tal que $v_i(a) = 1$ si a intersecta a $a_i^\star$ y $v_i(a) = 0$ en caso contrario. Pruebe que existe un equilibrio de Walras y proponga un algoritmo polinomial para encontrarlo.

Indicación: Se sabe que se puede resolver el problema de matching perfecto en un grafo bipartito de forma eficiente.

Problema 5 [Estimando la Balanceabilidad].- Considere una instancia $(N, v(\cdot))$ de utilidades transferibles con v sub-aditiva, i.e. $v(s \cup t) \leq v(s) + v(t)$ para todo s, t disjuntos. Considere el problema dual (D) y muestre que su mínimo con restricciones de integralidad $y_s \in \{0, 1\}$ es $v(N)$.

$$
\begin{aligned}
(D) \quad \text{mín} \quad & \sum_{s \subseteq N} v(s) y_s \\
s.a. \quad & \sum_{s \ni i} y_s = 1 \quad \forall i \in N \\
& y_s \geq 0 \quad \forall s \subseteq N
\end{aligned}
$$

Problema 6 [Monotonía Cruzada].- Considere el juego $(N, v(\cdot))$ y sea ξ repartición de costos γ-balanceada y con monotonía cruzada. Muestre que el γ-core de este juego es no-vacío.