Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Prof.: José Correa H., Roberto Cominetti C.
Aux.: Sebastián Barbieri Lemp, Alberto Vera Azócar

Teoría de Juegos - Clase Auxiliar 9
Remates Óptimos y Diseño de Mecanismos

16 de octubre de 2012

Problema 1 [Remate Discriminador].- Considere el problema de rematar un objeto, donde el agente quiere maximizar su beneficio. Hay dos participantes, uno con densidad $f_1(x) = c_1 x^2 \mathbb{1}_{\{0 \le x \le 1\}}$ y el otro con densidad $f_2(x) = c_2 x^2 \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2} \le x \le 1\}}$. Encuentre la asignación óptima.
Nota: ¿Cuál es la factibilidad de obtener las densidades de los jugadores?

Problema 2 [Juego Monoparamétrico].- Considere una instancia de n jugadores donde se debe elegir una acción $a \in A$. Diremos que el jugador i es monoparamétrico si $\exists W_i \subseteq A$ tal que $v_i(a) = v_i^\star \ \forall a \in W_i$ y $v_i(a) = 0 \ \forall a \notin W_i$, con algún $v_i^\star \in \mathbb{R}$. Asumiremos que todos los jugadores son monoparamétricos.
Sea (f, p) un mecanismo directo, diremos que f es monótona en i si $f(v) \in W_i \Rightarrow f(v_i', v_{-i}) \in W_i$ $\forall v_i' \ge v_i$ y que el mecanismo es normalizado si $f(v) \notin W_i \Rightarrow p_i(v) = 0$.
Demuestre que un mecanismo normalizado es compatible en incentivos ssi para todo i f es monótona en i y

$$f(v) \in W_i \Rightarrow p_i(v) = \sup\{v_i' : f(v_i', v_{-i}) \notin W_i\}$$

Problema 3 [Regulación de Monopolio].- Un monopolio vende un producto a precio $H(q) = 1 - q$ y su costo es $c(q) = \theta q$, con $\theta \sim F$ que es información privada con soporte en $[0, 1]$. El Estado diseña un mecanismo donde determina la cantidad $q(\theta)$ que produce el monopolio y el subsidio que le da, así

$$V(\theta) = \max_{0 \le \theta' \le 1} (1 - q(\theta') - \theta) q(\theta') + p(\theta')$$

1. El objetivo del Estado es maximizar $\mathbb{E}[q(\theta)\frac{1-q(\theta)}{2} - p(\theta) + \alpha u(\theta, \theta)]$, algún $\alpha \in (0, 1)$. Interprete la función objetivo y escriba el problema que debe resolver el Estado.

2. Demuestre que un mecanismo compatible en incentivos cumple

$$\begin{aligned} q(\theta) & \qquad \text{no-decreciente} && (1) \\ V(\theta) &= V(1) + \int_\theta^1 q(s)ds && (2) \\ p(\theta) &= V(1) + \int_0^1 q(s)ds - (1 - q(\theta) - \theta)q(\theta) && (3) \end{aligned}$$

3. Pruebe que las condiciones anteriores implican compatibilidad de incentivos.