



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Prof.: José Correa H., Roberto Cominetti C.  
Aux.: Sebastián Barbieri Lemp, Alberto Vera Azócar

## Teoría de Juegos Clase Auxiliar 5 - Juegos de Ruteo

6 de septiembre de 2012

**Problema 1 [Anarquía en Conexión Global].-** Demuestre que en todo juego de conexión global de  $n$  jugadores se tiene  $PoA \leq n$

**Problema 2 [Construyendo un Camino].-** Considere un conjunto de jugadores  $V$  que se quieren conectar a un nodo especial  $r$ . Modelamos la situación con un grafo  $G = (V \cup \{r\}, E)$  completo y  $c : E \rightarrow \mathbb{N}$  una función de costo que satisface desigualdad triangular. El conjunto de estrategias de cada jugador  $i \in V$  es elegir un camino que comience en  $i$ , digamos  $d_i = (i, i_1, i_2, \dots, i_m)$ , luego  $i$  debe pagar el costo del camino. Sea  $G'$  el subgrafo inducido por  $\cup_{i=1}^n d_i$ , si en este subgrafo  $i$  está conectado con  $r$ , entonces  $i$  gana 0, sino gana  $-\infty$ .

- Encuentre el óptimo social, donde el costo social lo definimos simplemente como la suma de todos los costos.
- Encuentre un NE del juego y concluya sobre el precio de la estabilidad.

**Problema 3 [Distribución de Carga].-** Considere que hay  $n$  jugadores, cada uno quiere procesar un trabajo en alguna de  $n$  máquinas disponibles. Si un jugador elige una máquina  $j$  entonces su costo es la cantidad de jugadores que hayan elegido la máquina  $j$ .

- Encuentre los NE en estrategias puras y concluya sobre el precio de la estabilidad.
- Muestre que el precio de la anarquía está acotado inferiormente por  $2 - \frac{1}{m}$

**Problema 4 [Conexión Global y Congestión].-** Consideraremos una variante del juego de conexión global. Sea  $G = (V, E)$  un grafo y  $n$  jugadores con pares origen-destino  $(o_i, d_i)$ . Sea  $\mathcal{R}_i$  el conjunto de  $(o_i, d_i)$ -caminos. Sea  $n_e$  el número de jugadores que usan el arco  $e$  y consideraremos una función de costo  $l_e(n_e)$  lineal no decreciente.

Asignemos a cada jugador un entero  $k_i \geq 1$  y una estrategia  $s_i$  será elegir  $k_i$  caminos en  $\mathcal{R}_i$ . El costo del jugador  $i$  será en este caso pagar por cada uno de los  $k_i$  caminos, independiente de si sean iguales o distintos. Muestre que este es un juego potencial.

**Problema 5 [Equilibrio de Wardrop].-** Considere un juego de ruteo no atómico en un grafo con tres nodos ( $a, b$  y  $c$ ) y demanda de 1 que sale de  $a$  y debe llegar a  $c$ . Si en un arco hay un flujo de  $x$  entonces los costos son  $C_{ac} = \frac{19}{3}x^2$ ,  $C_{ab} = x^2$  y  $C_{bc} = 3 + x$ . Encuentre el precio de la anarquía en esta instancia.