



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Prof.: José Correa H., Roberto Cominetti C.  
Aux.: Sebastián Barbieri Lemp, Alberto Vera Azócar

## Teoría de Juegos Clase Auxiliar 3 - Eficiencia de Equilibrios

21 de agosto de 2012

**Problema 1 [Complejidad de Encontrar NE].-** Demuestre que el problema de encontrar un NE en un juego de suma cero de tres jugadores es al menos tan difícil como el problema de encontrar un NE en un juego cualquiera de dos jugadores.

**Problema 2 [Construyendo un Camino].-** Considere un conjunto de jugadores  $V$  que se quieren conectar a un nodo especial  $r$ . Modelamos la situación con un grafo  $G = (V \cup \{r\}, E)$  completo y  $c : E \rightarrow \mathbb{N}$  una función de costo que satisface desigualdad triangular. El conjunto de estrategias de cada jugador  $i \in V$  es elegir un camino que comience en  $i$ , digamos  $d_i = (i, i_1, i_2, \dots, i_m)$ , luego  $i$  debe pagar el costo del camino. Sea  $G'$  el subgrafo inducido por  $\cup_{i=1}^n d_i$ , si en este subgrafo  $i$  está conectado con  $r$ , entonces  $i$  gana 0, sino gana  $-\infty$ .

- Encuentre el óptimo social, donde el costo social lo definimos simplemente como la suma de todos los costos.
- Encuentre un NE del juego y concluya sobre el precio de la estabilidad.

**Problema 3 [Distribución de Carga].-** Considere que hay  $n$  jugadores, cada uno quiere procesar un trabajo en alguna de  $n$  máquinas disponibles. Si un jugador elige una máquina  $j$  entonces su costo es la cantidad de jugadores que hayan elegido la máquina  $j$ .

- Encuentre los NE en estrategias puras y concluya sobre el precio de la estabilidad.
- Muestre que el precio de la anarquía está acotado inferiormente por  $2 - \frac{1}{m}$

**Problema 4 [Sobre Cerrado Segundo Precio].-** Considere a alguien que quiere rematar un artículo entre  $n$  participantes, donde cada participante tiene una valoración  $v_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  desconocida. Por simplicidad asumimos que todas las valoraciones son distintas.

Considere que el remate consta en que cada participante escribe sin que nadie se entere una apuesta en un sobre. Gana aquel que tenga la mayor apuesta, pero paga lo que diga la segunda mayor apuesta. Encuentre el NE en estrategias dominantes de este juego. Para el caso  $n = 3$  compare la utilidad esperada del que remata el artículo y del que lo gana si se juega el NE en estrategias dominantes y si las valoraciones se distribuyen independientemente según ley exponencial de parámetro  $\lambda$ .

**Problema 5 [Guerra de Desgaste].-** Considere a 2 jugadores que quieren un objeto, el que vale  $v_i > 0$  para el jugador  $i$ . El juego comienza en el tiempo  $t = 0$  y consideramos el tiempo como un continuo. El objeto debe cederse, si el jugador 1 lo cede al jugador 2 en el tiempo  $t$ , entonces 2 gana  $v_2 - t$  y 1 gana  $-t$ , si por el contrario lo cedió el jugador 2, entonces el 1 gana  $v_1 - t$  y el 2 gana  $-t$ . Si ambos lo ceden al mismo tiempo, cada uno gana  $v_i/2 - t$  pues reparten el objeto.

- Estudie todos los NE en estrategias puras.
- ¿Existe un NE donde un jugador juegue determinista, mientras que el otro tiene una estrategia mixta?