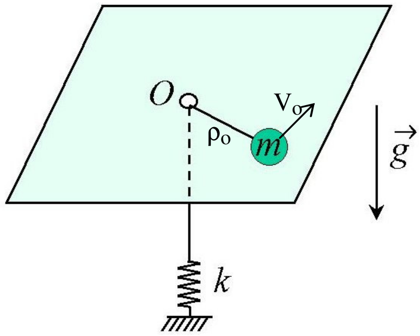
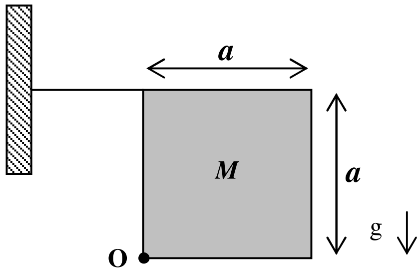
Curso Mecánica (FI-21a) **EXAMEN** **2 julio 2004**
Profs. P. Aceituno , E. Vera, P Sotomayor. **Tiempo: 3:00 h.**

P.1. Considere una partícula de masa $\boldsymbol{m}$ que desliza sin roce, sobre una superficie horizontal, atada a una cuerda. Esta pasa por un agujero $\boldsymbol{O}$ y se une a un resorte de constante elástica $\boldsymbol{k}$, colocado verticalmente debajo del agujero. Si el resorte se encontrara en su largo natural estando la cuerda extendida, la partícula se encontraría justo en $\boldsymbol{O}$. En un cierto instante, la partícula se impulsa con velocidad $\boldsymbol{v_o}$ perpendicular a la cuerda, desde una distancia $\boldsymbol{\rho_o}$ del agujero. Determine:



a) Ecuación de movimiento de la partícula.
b) Relación entre $\boldsymbol{v_o}$ y $\boldsymbol{\rho_o}$ para que la órbita sea circular.
c) Si la órbita circular es perturbada ligeramente en dirección radial, determine el periodo de pequeñas oscilaciones radiales.
d) Determine si la órbita resultante es cerrada para el caso **c)**

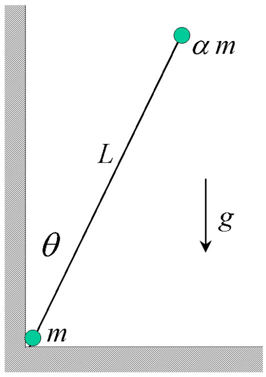
P.2 Considere una lámina cuadrada homogénea de lado $\boldsymbol{a}$ y masa $\boldsymbol{M}$, que puede girar sin roce alrededor de un eje horizontal fijo y perpendicular a la lámina que pasa por uno de sus vértices (**O**). Inicialmente, la lámina se encuentra en reposo sujeta por un hilo como se indica en la figura adjunta.



a) Calcule la tensión del hilo
b) En un cierto instante se corta el hilo y la lámina comienza a girar alrededor del eje O. Determine la máxima velocidad angular que alcanza la lámina.
c) Si la lámina cuelga libremente desde el eje, determine el periodo de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio

Nota: El momento de inercia de la lámina alrededor de un eje paralelo a **O** pero que pasa por el centro de la lámina es: $\boldsymbol{I_{cm} = Ma^2/6}$.

P.3 Dos partículas de masa $\boldsymbol{m}$ (abajo) y $\boldsymbol{\alpha m}$ (arriba) se encuentran unidas por una barra de largo $\boldsymbol{L}$ y masa despreciable. El sistema se coloca en posición vertical, con la partícula de masa $\boldsymbol{m}$ apoyada en una superficie horizontal junto a una pared vertical (ver figura). En un cierto instante el sistema se saca ligeramente desde su posición vertical y cae.



a) Encuentre una ecuación de movimiento para el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que forma la barra con la vertical.
b) Calcule, en función del ángulo $\boldsymbol{\theta}$, la magnitud de la fuerza normal $\boldsymbol{N_v}$ que la superficie horizontal ejerce sobre la partícula de masa $\boldsymbol{m}$, y de la fuerza normal $\boldsymbol{N_h}$ que la pared ejerce sobre esta misma partícula. No hay roce ni en la superficie horizontal ni en la pared.
c) Analice que sucede primero: la partícula inferior se levanta del suelo o se separa de la pared.

Solución Pregunta 1

a) Ecuación del movimiento
La única fuerza que actúa en el plano del movimiento es la tensión de la cuerda, que a su vez transmite la fuerza del resorte. Sabemos además que para $\rho = 0$ el resorte está en su largo natural.

Entonces, la tensión de la cuerda es: $\vec{T} = -k\rho\ \hat{\rho}$ => $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -k\rho$

Además es fuerza central => $\vec{\ell}_O = \overrightarrow{cte}$ => $\rho^2\dot{\phi} = cte = \rho_0 V_0$ => $\dot{\phi}^2 = \dfrac{\rho_0^2 V_0^2}{\rho^4}$

de donde: $\boxed{\ddot{\rho} - \dfrac{\rho_0^2 V_0^2}{\rho^3} + \dfrac{k}{m}\rho = 0}$ (1)

b) órbita circunferencial
En órbitas circunferenciales la variable ρ debe mantenerse constante: $\rho = \rho_0 = cte$ => $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$.

En (1) $-\dfrac{\rho_0^2 V_0^2}{\rho_0^3} + \dfrac{k}{m}\rho_0 = 0$ => La relación entre ρ_0 y V_0 en estas condiciones es: $\boxed{\dfrac{V_0^2}{\rho_0^2} = \dfrac{k}{m}}$ (2)

c) Período de pequeñas oscilaciones

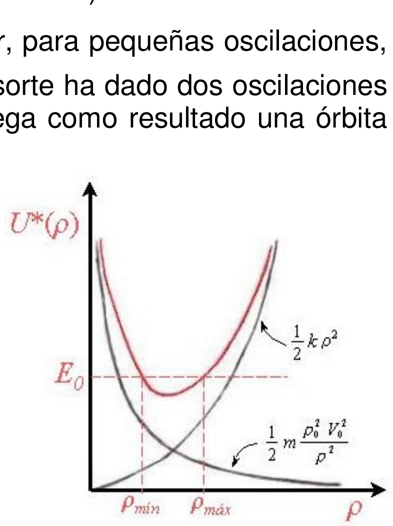
Para analizar oscilaciones radiales definimos el potencial efectivo $U^*(\rho) = \dfrac{1}{2}k\rho^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{\rho_0^2 V_0^2}{\rho^2}$ (3)

=> $\omega_p^2 = \dfrac{1}{m}\dfrac{d^2U^*}{d\rho^2}(\rho_0) = \dfrac{k}{m} + \dfrac{3\rho_0^2 V_0^2}{\rho_0^4}$ (ω_p : frecuencia de pequeñas oscilaciones)

de (2) $\omega_p^2 = \dfrac{4k}{m}$ => el periodo de pequeñas oscilaciones es: $\boxed{T = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

d) Determinación si es órbita cerrada
Al comparar la frecuencia natural del sistema masa-resorte ($\omega_N = \sqrt{k/m}$) con la frecuencia de pequeñas oscilaciones ($\omega_p = 2\sqrt{k/m}$) vemos que $\omega_p = 2\omega_N$. Es decir, para pequeñas oscilaciones, la partícula recorre una vuelta completa de la órbita justo cuando el resorte ha dado dos oscilaciones completas. Entonces, <u>la aproximación</u> de pequeñas oscilaciones entrega como resultado una órbita cerrada.

Por otra parte, podemos observar que $U^*(\rho)$ admite un mínimo para $\rho = \rho_0$. Ayudados por el gráfico, vemos que la partícula no puede superar una barrera de potencial determinada por el nivel de energía (E_0) del sistema (ya que si $U^*(\rho) > E_0$ => $\dot{\rho}^2 < 0$).



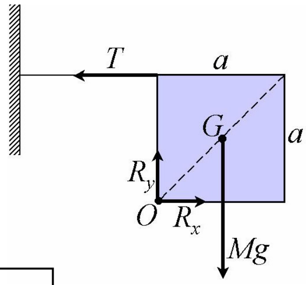
$$E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}k\rho_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U^*(\rho)$$

Por lo tanto, el valor de ρ se mantiene siempre entre $\rho_{mín}$ y $\rho_{máx}$.

Sin embargo, esto no asegura que la órbita sea cerrada, ya que deberíamos asegurar que la partícula llega al mismo punto en algún tiempo finito.

Problema 2

a) La tensión del hilo



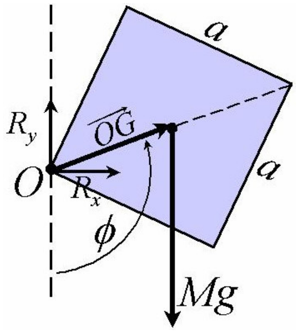
Las fuerzas externas que actúan sobre la lámina se muestran en la figura

=> el torque neto con respecto a O es:

$$\sum \vec{\tau}_O^{ext} = a\,\hat{j} \times T\,(-\hat{i}) + \left[\frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j}\right] \times Mg\,(-\hat{j}) = (aT - \frac{a}{2}Mg)\,\hat{k} \qquad (1)$$

En esta etapa la lámina está en equilibrio => $\sum \vec{\tau}_O^{ext} = \vec{0}$, en (1) => $\boxed{\vec{T} = -\frac{Mg}{2}\,\hat{i}}$

b) velocidad angular máxima de la lámina



Cuando el hilo se corta la lámina se pone en movimiento, y se cumple que:

$$\sum \vec{\tau}_0^{ext} = I_O\,\ddot{\phi}\,\hat{k} \qquad (2)$$

el torque neto con respecto a O es:

$$\tau_O = \overrightarrow{OG} \times Mg\,(-\hat{j}) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left[\text{sen}\phi\,\hat{i} - \cos\phi\,\hat{j}\right] \times Mg\,(-\hat{j}) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\text{Mg sen}\phi\,\hat{k}$$

por otra parte, conocemos I_G => determinamos IO con el teorema de Steiner

$$I_O = I_G + M\,\overrightarrow{OG}^2 = \frac{Ma^2}{6} + M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2Ma^2}{3}$$

En (2): $\frac{a\sqrt{2}}{2}\text{Mg sen}\phi\,\hat{k} = \frac{2Ma^2}{3}\ddot{\phi}\,\hat{k}$ => $\ddot{\phi} + \frac{3g\sqrt{2}}{4a}\text{sen}\phi = 0$ (3.1)

Que también podemos escribir como: $\ddot{\phi} + \omega^2\,\text{sen}\phi = 0$ (3.2) , con $\omega^2 = \frac{3g\sqrt{2}}{4a}$ (3.3)

Entonces: $\int_{\phi_0}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\,d\dot{\phi} = -\omega_0^2 \int_{\phi_0}^{\phi} \text{sen}\phi\,d\phi$, con las condiciones iniciales: $\phi(0) = \frac{3\pi}{4}$ y $\dot{\phi}(0) = 0$

de donde: $\dot{\phi}^2 = 2\omega^2\left[\cos\phi - (-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$ => $\dot{\phi}_{máx} = \dot{\phi}(\phi = 0) = 2\omega^2\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $\boxed{\dot{\phi}_{máx} = \frac{3}{2}\frac{g}{a}\left[\sqrt{2} + 1\right]}$

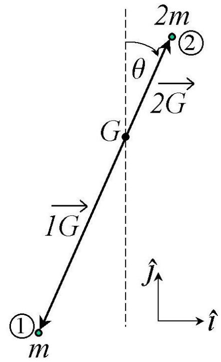
c) período de pequeñas oscilaciones (T)

Para pequeñas oscilaciones, la ecuación (3.2) se aproxima a: $\ddot{\phi} + \omega^2\,\phi = 0$

Reemplazando el valor de ω de (3.3) encontramos que: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{g}{a}}}}$

Pregunta 3

Después del choque el sistema no tiene punto fijo, entonces haremos el análisis con respecto al centro de masas (G):



Determinación de G: $\overrightarrow{G1} = \dfrac{2m\,l\,(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + m\cdot 0}{3m} = \dfrac{2}{3}l\,(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$

Para el movimiento del sistema **después del choque** se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\sum \vec{F}^{ext} = M\,\vec{a}_G \qquad (1)$$

$$\sum \vec{\tau}_G^{ext} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \qquad (2)$$

Se pide la velocidad angular, por lo tanto necesitamos analizar el movimiento en torno al centro de masas. Es decir, interesa sólo la ecuación (2), donde:

$$\sum \vec{\tau}_G^{ext} = \overrightarrow{1G}\times m\vec{g} + \overrightarrow{2G}\times 2m\vec{g} = -\frac{2}{3}l\,(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\times(-mg\,\hat{j}) + \frac{1}{3}l\,(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\times(-2mg\,\hat{j}) = \vec{0} \qquad (3)$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^* = \overrightarrow{1G}\times m\,\dot{\vec{\rho}}_1 + \overrightarrow{2G}\times 2m\,\dot{\vec{\rho}}_2 = \left[m\left(\frac{2l}{3}\right)^2\dot{\theta} + 2m\left(\frac{l}{3}\right)^2\dot{\theta}\right]\left(-\hat{k}\right) = -\frac{2}{3}ml^2\,\dot{\theta}\,\hat{k} \qquad (4)$$

(También se puede usar I_G, ya que: $\vec{L}_G^* = \vec{L}_G = I_G\,\vec{\omega} = I_G\,\dot{\theta}\,(-\hat{k})$, con: $I_G = \sum m_i\,r_i^2 = m\dfrac{4l^2}{9} + 2m\dfrac{l^2}{9} = \dfrac{2ml^2}{3}$)

además (3) => $\vec{L}_G^* = \overrightarrow{cte}$ => $\dot{\theta} = cte = \theta(t=0)$ (5)

Por otra parte, **durante el choque** el sistema conserva su momentum lineal $\vec{P}$ y su momento angular $\vec{L}_G$. Dado que nos interesa determinar $\dot{\theta}$, aplicamos conservación del momento angular.

Justo antes del choque, la partícula que venía con $\overrightarrow{V_0}$ está junto a la masa superior de la barra, en la posición dada por el vector $\overrightarrow{2G} = \dfrac{l}{3}\,\hat{j}$

Usando la siguiente notación para t = 0: $\begin{cases} t = 0^-: & \text{instante justo antes del choque} \\ t = 0^+: & \text{instante justo después del choque} \end{cases}$

se tiene que:

antes del choque: $\vec{L}_G(0^-) = \dfrac{l}{3}\,\hat{j}\times mV_0\,\hat{i} = -\dfrac{l}{3}mV_0\,\hat{k}$

después del choque: de(4) $\vec{L}_G(0^+) = -\dfrac{2}{3}ml^2\,\dot{\theta}(0^+)\left(-\hat{k}\right)$

$$\vec{L}_G(0^-) = \vec{L}_G(0^+) \;\Rightarrow\; \frac{l}{3}mV_0 = \frac{2ml^2}{3}\,\dot{\theta}(0^+) \;\Rightarrow\; \dot{\theta}(0^+) = \frac{V_0}{2l}$$

de (5) => $\boxed{\vec{\omega}(\theta) = -\dfrac{V_0}{2l}\,\hat{k}, \quad \forall\theta}$