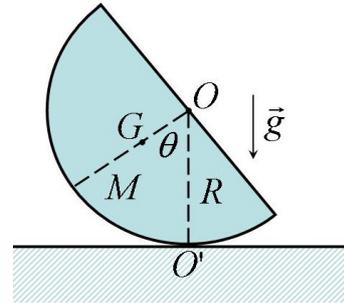
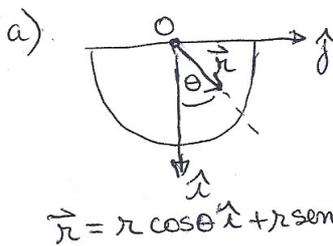


Problema Planteado en la clase del 26-Junio-2012

El sólido de la figura, es semicircular, plano, de radio R y masa m .



- Encuentre la posición del centro de masa OG .
- Calcule I_O , I_G , e $I_{O'}$: Momentos de inercia respecto de los ejes perpendiculares al disco, que pasan por O , G y O' , respectivamente. (O' = Centro Instantáneo de Rotación).
- Encuentre la energía cinética y potencial del sólido. (en función de θ y $\dot{\theta}$).



$$\vec{r} = r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_S \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_S r \sigma ds$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \cdot \frac{M}{\pi R^2/2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R (r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j}) r dr d\theta$$

$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi R^2/2}$
(distribución homogénea de masa)

$$\vec{OG} = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R \frac{R^3}{3} (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) d\theta = \frac{2R}{3\pi} (\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4R}{3\pi} \hat{i}$$

b) Se pide en torno a ejes \perp a la superficie del disco $\Rightarrow I_{zz}$

i) En torno a O : $(I_{zz})_O = \int_S (x^2 + y^2) dm = \sigma \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cdot r dr d\theta$

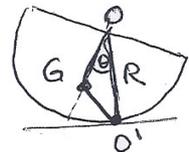
$$(I_{zz})_O = \frac{2M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} d\theta \Rightarrow (I_{zz})_O = \frac{MR^2}{2}$$

ii) En torno a G : Por Steiner: $(I_{zz})_O = (I_{zz})_G + \frac{M(OG)^2}{9\pi^2}$

$$(I_{zz})_G = MR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$$

iii) En torno a O' : $(I_{zz})_{O'} = (I_{zz})_G + M(GO')^2$

Donde: $(GO')^2 = \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + R^2 - 2 \cdot \frac{4R}{3\pi} \cos\theta$



c) O' = punto fijo (en cada instante) \Rightarrow Energía cinética = $K = \frac{1}{2} I_{O'} \dot{\theta}^2$

Energía Potencial = $U = mgR \left(1 - \frac{4R}{3\pi} \cos\theta \right)$