Control n2 problema3

a) Momento de inercia antes del choque. Solo la ruleta es considerada y como la unión de cuatro barras de largo r y masa m, por tanto:

$$I_{ruleta\ c/r\ O} = 4*(Mr^2/3) = 4Mr^2/3$$

Momento de inercia después del choque. La ruleta más la masa localizada en un extremo de los brazos de la ruleta, por tanto:

$$I_{ruleta+particula\ c/r\ O} = 4Mr^2/3 + mr^2 = 4Mr^2/3 + Mr^2/3 = 5Mr^2/3$$

b) Dado que el momento de inercia del sistema es una cantidad conservada podemos comparar ambas cantidades para obtener la velocidad angular.

El momento de inercia antes de la colision

$$\boldsymbol{L}_{antes} = \boldsymbol{L}_{ruleta} + \boldsymbol{L}_{particula} = I_{ruleta\ c/r\ O}\,\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = (-4Mr^2\omega_1/3 + r\ mv\ cos\theta)\ \boldsymbol{k}$$

Donde el momento angular de la partícula apuntan hacia fuera de la hoja y la velocidad angular hacia dentro de la hoja.

Y el momento angular después de la colisión:

$$\boldsymbol{L}_{despues} = \boldsymbol{L}_{ruleta+particula} = I_{ruleta+particula\ c/r\ O}\,\boldsymbol{\omega}_2 = (5Mr^2\omega_2/3)\ \boldsymbol{k}$$

De $\boldsymbol{L}_{antes} = \boldsymbol{L}_{despues}$, y a partir de la las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$-4Mr^2\omega_1/3 + rmv\ cos\theta = 5Mr^2\omega_2/3 \Rightarrow \omega_2 = (vcos\theta - 4r\omega_1)/\ 5r$$

y el sentido de giro de la ruleta después del choque esta dado por la condición:

$$(vcos\theta - 4r\omega_1) >< 0 \Rightarrow \quad cos\theta < 4r\omega_1/v\ ,\ invierte\ el\ sentido\ de\ giro$$

$$cos\theta > 4r\omega_1/v\ ,\ mantiene\ el\ sentido\ de\ giro$$

Nota1: las cantidades r, v, ω_1 (todas escalares) son definidas positivas.

c) La diferencia de velocidades angulares es:

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 - (vcos\theta - 4r\omega_1)/5r = (9r\omega_1 - vcos\theta)/5r.$$

Esta cantidad es máxima si $vcos\theta$ es mínima, es decir para θ=90.

d) La masa total del sistema después de la colisión es $4M+\frac{M}{3}(13m)$. Y la posición del centro de masas después de la colisión:

$$CM = CM_{ruleta} + CM_{particula} = 0 + (m\boldsymbol{r}/13m) = r/13$$

Por tanto la velocidad del centro de masas después de la colisión:

$$V_{CM} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}/_{13} = \pm\boldsymbol{\theta}\ (vcos\theta - 4r\omega_1)/65$$

Nota2: El signo depende del sentido de giro después de la colisión.
Nota3: Es igualmente válido si ellos entregan solo el módulo de la velocidad olvidando la dirección.

e) La "perdida" de energía cinética es:

$$\Delta E_K = E_{K,\ después} - E_{K,\ antes} = I_{ruleta+particula\ c/r\ O}\,\omega_2^2/2 - (I_{ruleta\ c/r\ O}\,\omega_1^2/2 + mv^2/2)$$

$$= (5\omega_2^2 - 4\omega_1^2)Mr^2/3 - mv^2/2 = mvcos\theta(vcos\theta - 8r\omega_1)/5 - 4m\omega_1/5 - mv^2/2$$

Nota4: La solución de esta sección esta completa hasta este punto. No es necesario demostrar explícitamente que esta diferencia de energía es no nula.