

Sistemas Newtonianos - Oscilaciones (Pauta)

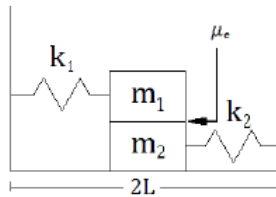
Profesor: Roberto Rondanelli

Auxiliares: Álvaro Aravena, Francisca Concha, Felipe Toledo

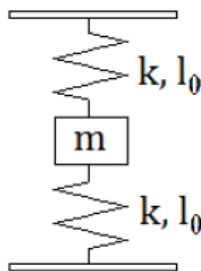
October 2, 2012

1 Problemas

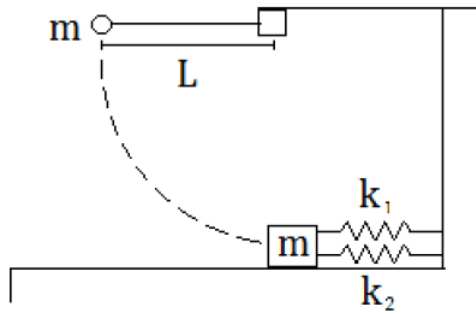
- P1. Se superponen dos masas en presencia de dos resortes de largo natural L , como se indica en la figura. Calcule la amplitud máxima de oscilación de modo que ambas masas no se separen, gracias a la presencia de una fuerza de roce estático (de constante μ_e).



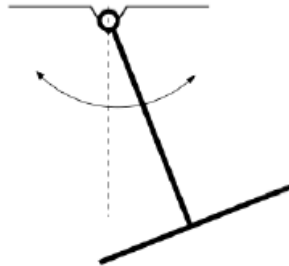
- P2. Considerando que inicialmente ($t = 0$), ambos resortes están en su largo natural y el bloque está en reposo. Determinar la ecuación de movimiento del bloque, la frecuencia angular, período de oscilaciones y amplitud.



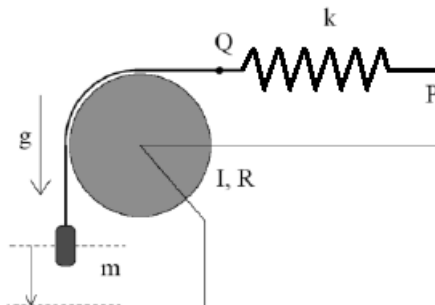
- P3. Se suelta la masa de un péndulo desde el reposo, de modo tal que desciende y choca elásticamente con un bloque de igual masa m . Encontrar la ecuación de movimiento del bloque tras la colisión, considerando que en $t = 0$ los resortes están en su largo natural l_0 . Ignore la presencia del péndulo después del choque.



- P4. Una T simétrica formada por dos barras homogéneas idénticas de longitud L , pende sin fricción del extremo libre de su barra central. En presencia de la gravedad terrestre g , la T oscila manteniéndose siempre en el plano de la figura. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

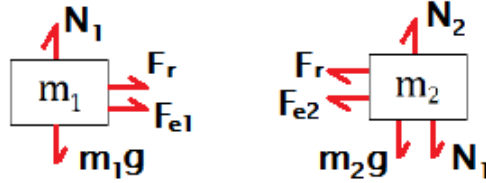


- P5. El sistema de la figura consiste en una carga de masa m que pende de una cuerda ideal que en el punto Q se une a un resorte. El resorte, dispuesto en forma horizontal, está sujeto a una pared fija en el punto P . La constante elástica del resorte es k y su extremo en Q nunca entra en contacto con la rueda. Esta última tiene un radio R y momento de inercia I con respecto a su eje central, y además puede girar sin fricción en torno a este. La cuerda en contacto con la rueda nunca resbala. Si la carga es soltada del reposo desde la altura mínima para la cual el resorte no sufre estiramiento, determine la frecuencia de las oscilaciones del sistema.



2 Resolución de problemas

- P1. Situamos un eje horizontal con $x = 0$ en el centro del sistema (coincidente con el largo natural de ambos resortes). Se impone una dirección arbitraria para F_r y opuesto para cada masa y, para conservar generalidad, se considera que no necesariamente es positivo. La fuerza elástica se dibuja "alejándose del resorte" y se utilizará la fórmula $F_e = -k\Delta x$. DCL asociados:



Es claro que:

$$\begin{aligned}
 N_1 - m_1g &= 0 \rightarrow N_1 = m_1g \\
 m_1a_{1x} &= F_r + F_{e1} = F_r + (-k_1\Delta x) = F_r - k_1x \\
 N_2 - m_2g - N_1 &= 0 \rightarrow N_2 = m_2g + N_1 = (m_1 + m_2)g \\
 m_2a_{2x} &= -F_{e2} - F_r = -(-k_2\Delta x) - F_r = +k_2(-x) - F_r = -k_2x - F_r
 \end{aligned}$$

Es claro que, como las masas no se separan, la aceleración en el eje x de ambos cuerpos coincide ($a_{1x} = a_{2x} = a$)

$$\begin{aligned}
 m_1a &= F_r - k_1x \\
 m_2a &= -k_2x - F_r
 \end{aligned}$$

Uniendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{F_r - k_1x}{m_1} &= \frac{-k_2x - F_r}{m_2} \\
 F_r m_2 - k_1 m_2 x &= -k_2 m_1 x - F_r m_1 \\
 x &= \frac{F_r(m_1 + m_2)}{k_1 m_2 - k_2 m_1}
 \end{aligned}$$

Los casos límite son cuando $F_r = \pm \mu_e N_1 = \pm \mu_e m_1 g$

$$x_{max} = \pm \frac{\mu_e m_1 (m_1 + m_2) g}{m_2 k_1 - m_1 k_2}$$

Y como la amplitud se define como positiva:

$$A_{max} = \frac{\mu_e m_1 (m_1 + m_2) g}{|m_2 k_1 - m_1 k_2|}$$

Podemos tambien calcular la frecuencia natural de oscilaciones, sabemos que:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_r - k_1 x \\ m_2 a &= -k_2 x - F_r \end{aligned}$$

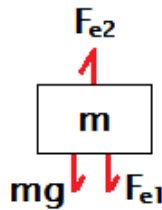
Despejamos:

$$\begin{aligned} m_1 a + k_1 x &= -k_2 x - m_2 a \\ a + \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2} x &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2} x &= 0 \end{aligned}$$

Lo que representa un MAS con:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}$$

- P2. Situamos un eje vertical con $y = 0$ en el centro del sistema (coincidente con el largo natural de ambos resortes), positivo hacia arriba. La fuerza elástica se dibuja "alejándose del resorte" y se utilizará la fórmula $F_e = -k\Delta x$. DCL asociado:



Ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_y &= F_{e2} - F_{e1} - mg \\ F_y &= (-ky) - (-k(-y)) - mg = -2ky - mg \\ m\ddot{y} &= -2ky - mg \\ \ddot{y} + \frac{2k}{m}y + g &= 0 \end{aligned}$$

Notamos que no es movimiento armónico simple escrito de esta forma. Pero si usamos una variable $z = y + \frac{gm}{2k}$, es claro que $\ddot{z} = \ddot{y}$. Entonces reemplazamos:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{2k}{m}(z - \frac{gm}{2k}) + g &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{2k}{m}z &= 0 \end{aligned}$$

Lo que sí es movimiento armónico simple. Donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Las soluciones de este movimiento son del tipo:

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

Luego, como $y = z - \frac{gm}{2k}$:

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) - \frac{gm}{2k}$$

$$\dot{y}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

Y como sabemos que $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 0$, se tiene:

$$\dot{y}(0) = -A\omega_0 \sin(\theta_0) = 0 \rightarrow \sin(\theta_0) = 0 \rightarrow \theta_0 = 0$$

$$y(0) = A\cos(0) - \frac{gm}{2k} = A - \frac{gm}{2k} = 0 \rightarrow A = \frac{gm}{2k}$$

Luego, la amplitud es $\frac{gm}{2k}$, y la ecuación de movimiento es:

$$y(t) = \frac{gm}{2k} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) - \frac{gm}{2k}$$

- P3. La velocidad de la masa del péndulo justo antes del choque se puede calcular empleando conservación de la energía.

$$E_i = K + U_g = mgL$$

$$E_f = K + U_g = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gL}$$

En un choque elástico se conserva el momentum lineal y la energía. Luego:

$$p_i = m\sqrt{2gL}$$

$$p_f = mv_1 + mv_2 \rightarrow \sqrt{2gL} = v_1 + v_2$$

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 = mgL$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow 2gL = v_1^2 + v_2^2$$

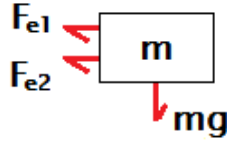
Si v_1 es la velocidad tras el choque de la masa adherida a los resortes:

$$2gL = v_1^2 + (\sqrt{2gL} - v_1)^2$$

$$2gL = v_1^2 + 2gL - 2v_1\sqrt{2gL} + v_1^2$$

$$0 = 2v_1^2 - 2v_1\sqrt{2gL} \rightarrow v_1 = \sqrt{2gL}$$

Nos olvidamos del choque: tenemos una masa unida a dos resortes con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = \sqrt{2gL}$. DCL del sistema (origen en la posición del largo natural de los resortes):



Ecuaciones:

$$F_x = -F_{e1} - F_{e2} = -(-k_1(-x)) - (-k_2(-x)) = -(k_1 + k_2)x$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0$$

Lo que es un MAS con $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$, con soluciones del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

Por las condiciones iniciales:

$$x(0) = A\cos(\theta_0) = 0 \rightarrow \cos(\theta_0) = 0 \rightarrow \theta_0 = \pi/2$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\pi/2) = \sqrt{2gL} \rightarrow A = -\frac{\sqrt{2gL}}{\omega_0} = -\sqrt{\frac{2gLm}{k_1 + k_2}}$$

Luego:

$$x(t) = -\sqrt{\frac{2gLm}{k_1+k_2}} \cos(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \pi/2)$$

- P4. Es un péndulo físico con momento de inercia I , lo calculamos (asumimos que M es la masa de cada parte de la T):

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + (\frac{1}{12}ML^2 + ML^2) = \frac{17}{12}ML^2$$

Consideremos un ángulo θ con respecto a la vertical, el torque que siente el cuerpo viene dado por:

$$-(Masa)g(Distancia)\sin(\theta) = \tau$$

$$-(2M)g(L_{cm})\sin(\theta) = \tau$$

$$-2Mg(\frac{ML/2+ML}{M+M})\sin(\theta) = I\alpha$$

$$-\frac{3gL}{2}\sin(\theta) = \frac{17}{12}L^2\alpha$$

Sabemos que $\alpha = \ddot{\theta}$, entonces:

$$\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\sin(\theta) = 0$$

Para pequeñas oscilaciones, $\sin(\theta) = \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\theta = 0$$

Lo que es MAS con $\omega_0^2 = \frac{18g}{17L}$

- P5. Utilizamos un método alternativo al de suma de torques, calculamos la energía del sistema. Situamos en $y = 0$ la altura inicial del sistema e y representa la posición de la masa con respecto a ese sistema de referencia, es claro que el estiramiento del resorte será el inverso aditivo de la posición de la masa (si la posición de la masa es y^* , el resorte está estirado $-y^*$).

$$\text{Energía potencial elástica: } U_e = \frac{1}{2}k(-y)^2 = \frac{ky^2}{2}$$

$$\text{Energía potencial gravitatoria: } U_g = mgy$$

$$\text{Energía cinética: } K = K_{Polea} + K_{Masa} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Como la cuerda es ideal y no resbala, existen relaciones entre $\dot{y}$ y $\dot{\theta}$, se tiene: $\dot{y}/R = \dot{\theta}$. Incorporando esta fórmula, la energía mecánica total es:

$$E_m = \frac{ky^2}{2} + mgy + \frac{1}{2}I(\dot{y}/R)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Como la energía se conserva, su derivada es nula:

$$\dot{E}_m = 0 = \frac{k}{2}2y\dot{y} + mg\dot{y} + \frac{1}{2R^2}I2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m2\dot{y}\ddot{y}$$

$$0 = ky + \ddot{y}\left(\frac{I}{R^2} + m\right) + mg$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}y + \frac{mg}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)} = 0$$

Hacemos un cambio de variables $z = y + \frac{mg}{k}$ y $\ddot{z} = \ddot{y}$, reemplazamos:

$$\ddot{z} + \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}\left(z - \frac{mg}{k}\right) + \frac{mg}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)} = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}z = 0$$

Que es MAS con $\omega_0^2 = \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}$