# Sistemas Newtonianos - Oscilaciones amortiguadas y forzadas

Profesor: Roberto Rondanelli
Auxiliares: Álvaro Aravena, Francisca Concha, Felipe Toledo

October 5, 2012

## 1 Resumen teórico

### 1.1 Fuerza de roce viscoso

Las fuerzas de roce viscoso pueden expresarse de la forma:

$$\vec{F} = -f(|\vec{v}|)\hat{v}$$

Esta forma de roce es disipativa ($f > 0$). Si bien es complicado determinar las características de $f$, se reconocen dos regimenes de velocidad:

$$\text{Para movimientos lentos (priman fuerzas viscosas) } f(v) \to f_s(v) \propto v$$
$$\text{Para movimientos rápidos (priman fuerzas turbulentas) } f(v) \to f_r(v) \propto v^2$$

### 1.2 El Frenado de una Esfera sin Gravedad

Considere una masa $m$ rodeada de aire en ausencia de gravedad, con velocidad inicial $v_0$ y posición inicial $x_0 = 0$, sometida a una fuerza de roce viscoso $F_x = -bv_x$ ($b$ : coeficiente de roce viscoso).
A partir de la ecuación de movimiento, podemos deducir que:

$$v_x(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$
$$x_x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Donde $\tau = m/b$.

### 1.3 Caída libre con gravedad

Considere una masa $m$ en caída libre sometida a un roce viscoso actuando en la dirección vertical. Se tiene que $\ddot{y} = g - (1/\tau)\dot{y}$. Si el objeto parte del reposo en $y = 0$, se obtiene:

$$y(t) = g\tau^2(\tfrac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1)$$
$$V_T = g\tau$$

### 1.4 Oscilaciones Amortiguadas

Considere un sistema formado por un bloque de masa $m$ unido a un resorte de constante elástica $k$. Como es sabido:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Además, considere la acción de una fuerza de roce viscoso $\vec{F} = -b\dot{x}$. De acuerdo a la segunda ley de Newton, podemos llegar a: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La solución es de la forma:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau}cos(\Omega t + \phi_0)$$

Donde $\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$ y los parámetros $A$ y $\phi_0$ dependen de las condiciones iniciales.

### 1.5 Oscilaciones Amortiguadas Forzadas

Si se tiene un oscilador amortiguado por una fuerza de roce viscoso $\vec{F} = -b\dot{x}$ y una fuerza de forzaje $F(t) = F_0 sin(\omega t)$, la ecuación de Newton resulta:

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 sin(\omega t)$$
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} sin(\omega t)$$

Cuyas soluciones son:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau}cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} sin(\omega t - \delta)$$

Con:

$$tan\delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Cuando $b \to 0$, se tiene $\tau \to \infty$, por lo que $e^{-t/2\tau} \to 1$. Además, la amplitud de la parte estacionaria $B(\omega) \to F_0/(M(\omega_0^2 - \omega^2))$, por lo tanto presenta divergencia en $\omega = \omega_0$.

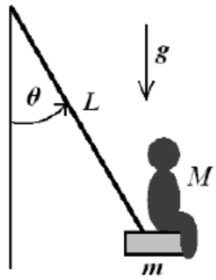
## 2 Problemas

P1. Un niño de masa $M$ está sentado en un columpio de masa $m$ y largo $L$. El coeficiente de roce viscoso del columpio y el niño con el aire es $b$. Si el columpio se empuja con una fuerza $\vec{F} = F_0 sin(\omega t)\hat{\theta}$, donde $\hat{\theta}$ es la dirección tangencial al movimiento del columpio (es decir, perpendicular siempre a la cuerda, y en dirección de $\theta$ creciente), se le pide detallar:

(a) La ecuación de movimiento del columpio.

(b) El periodo de pequeñas oscilaciones.

(c) La frecuencia $\omega_r$ de resonancia del columpio.




P2. Una masa de 2 $[kg]$ oscila colgada de un resorte de constante $k = 400$ $[N/m]$. La constante de amortiguamiento de la situación es $\nu = 1$ $[s^{-1}]$. El sistema es forzado por una fuerza sinusoidal de amplitud $F_0 = 10$ $[N]$ y la frecuencia angular $\omega = 10$ $[rad/s]$.

(a)¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones en el régimen estacionario?

(b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia?

(c) Encuentre la amplitud de las vibraciones en la resonancia.

P3. Un oscilador formado por un resorte y un cuerpo de masa $m$ está inmerso en un medio viscoso. Las oscilaciones resultan amortiguadas de forma tal que, partiendo de una amplitud $A$, al cabo de cinco ciclos su amplitud es $A/3$. El lapso de cada ciclo es de 0.2 $[s]$.

(a) Determine la frecuencia angular $\omega_0$ del oscilador.

(b) Determine la velocidad terminal de caída del mismo cuerpo, si es dejado caer libre y verticalmente en el mismo medio, bajo la acción de la gravedad.

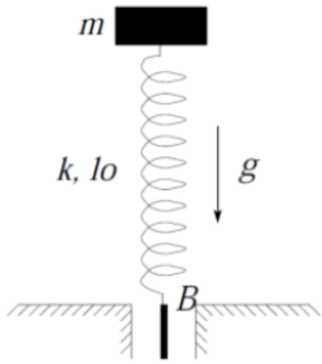
P4. Considere una partícula de masa $m$ que está apoyada sobre un resorte de constante $k$ y largo natural $l_0$, bajo la acción de gravedad. El punto $B$ de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa.

(a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa.

(b) En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto $B$ comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de $B$ puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 sin(\omega t)\hat{j}$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa.

(c) Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas.

(d) Manteniendo la amplitud $A_0$ fija, considere que la frecuencia $\omega$ es menor que la frecuencia de resonancia. ¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?




P5. Se tiene un oscilador mecánico amortiguado, compuesto por un carro de masa $m = 0.54$ $[Kg]$ y un resorte de constante de rigidez $k$. El carro se mueve sobre un riel lubricado, de modo que el roce está bien descrito por una ley de roce viscoso lineal. Dadas ciertas condiciones iniciales, se obtiene una serie de medidas de la posición $x$ del carro en función del tiempo $t$. Estos resultados se presentan en el gráfico adjunto. A partir de él, obtenga una estimación del valor de $k$ para el sistema.