Sistemas Newtonianos - Oscilaciones

Profesor: Roberto Rondanelli
Auxiliares: Álvaro Aravena, Francisca Concha, Felipe Toledo

September 30, 2012

1 Resumen teórico

1.1 Movimiento Circular Uniforme

Se caracteriza por tener un radio R constante, y se suele describir utilizando como parámetro el ángulo entre el vector posición y el eje $\hat{x}$. Luego:

$$\vec{r} = Rcos(\phi)\hat{x} + Rsin(\phi)\hat{y}$$

Como el movimiento es uniforme, la velocidad angular ($\vec{\omega}$) es constante:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} = Constante$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t \rightarrow (x(t), y(t)) = (Rcos(\phi_0 + \omega t), Rsin(\phi_0 + \omega t))$$

Se define:

(a) R : Amplitud.

(b) $\phi(t)$: Fase.

(c) ϕ_0 : Constante de Fase.

(d) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: Período.

1.2 Movimiento armónico simple (MAS)

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de un oscilador armónico simple es:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Cada vez que la ecuación dinámica de un sistema sea de esta forma, estaremos en presencia de un oscilador armónico. Y la solución es de la forma:

$$x(t) = Acos(\omega_0 t + \theta_0)$$
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \theta_0)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 cos(\omega_0 t + \theta_0) = -\omega_0^2 x(t)$$

Donde:

(a) $|A|$: Amplitud.

(b) θ_0 : Constante de Fase.

(c) ω_0 : Frecuencia Angular.

(d) $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$: Período.

1.3 Resorte Ideal

Dado un resorte de constante elástica k y largo natural x_0, se tiene:

$$F_e = ma = m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

Es fácil notar que se trata de un oscilador armónico, donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que la energía potencial elástica de un resorte de constante elástica k elongada Δx viene dada por:

$$\text{Energía potencial elástica} = U_e = \tfrac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

Luego, la energía mecánica viene dada por:

$$\text{Energía mecánica} = U_e + K = \tfrac{1}{2}kA^2$$

1.4 Péndulo Simple

Cuerpo puntual de masa m colgando de un hilo ideal inextensible de longitud R. La ecuación de movimiento que rige se dinámica es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} sin(\theta) = 0$$

Donde θ representa el ángulo entre el hilo y la vertical. Para el caso en que el péndulo oscila con ángulos pequeños ($1\ rad \gg \theta$), podemos aproximar $sin(\theta) \sim \theta$. Obteniéndose la ecuación de movimiento característica de MAS, donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

1.5 Péndulo Físico

Péndulo real que no puede ser aproximado por un péndulo simple ($I \neq mR^2$). Si la masa del péndulo es M, d es la posición del centro de masa y I es el momento de inercia. Se tiene:

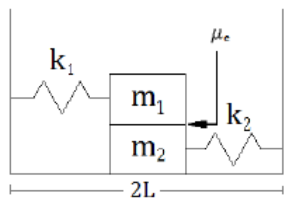
$$\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} sin(\theta) = 0$$

Imponiendo la condición de pequeñas oscilaciones, estamos en presencia de MAS, con:

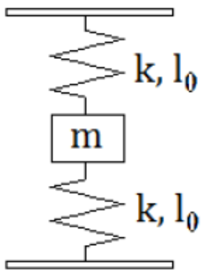
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

2 Problemas

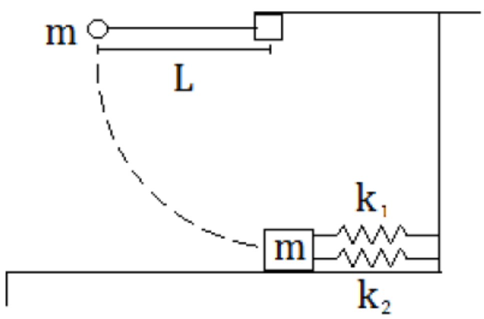
P1. Se superponen dos masas en presencia de dos resortes de largo natural L, como se indica en la figura. Calcule la amplitud máxima de oscilación de modo que ambas masas no se separen, gracias a la presencia de una fuerza de roce estático (de constante μ_e).



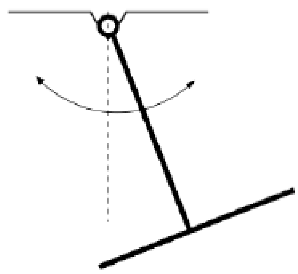
P2. Considerando que inicialmente ($t = 0$), ambos resortes están en su largo natural y el bloque está en reposo. Determinar la ecuación de movimiento del bloque, la frecuencia angular, período de oscilaciones y amplitud.



P3. Se suelta la masa de un péndulo desde el reposo, de modo tal que desciende y choca elásticamente con un bloque de igual masa m. Encontrar la ecuación de movimiento del bloque tras la colisión, considerando que en $t = 0$ los resortes están en su largo natural l_0. Ignore la presencia del péndulo después del choque.



P4. Una T simétrica formada por dos barras homogéneas idénticas de longitud L, pende sin fricción del extremo libre de su barra central. En presencia de la gravedad terrestre g, la T oscila manteniéndose siempre en el plano de la figura. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.



P5. El sistema de la figura consiste en una carga de masa m que pende de una cuerda ideal que en el punto Q se une a un resorte. El resorte, dispuesto en forma horizontal, está sujeto a una pared fija en el punto P. La constante elástica del resorte es k y su extremo en Q nunca entra en contacto con la rueda. Esta última tiene un radio R y momento de inercia I con respecto a su eje central, y además puede girar sin fricción en torno a este. La cuerda en contacto con la rueda nunca resbala. Si la carga es soltada del reposo desde la altura mínima para la cual el resorte no sufre estiramiento, determine la frecuencia de las oscilaciones del sistema.