

EL 31A ANALISIS DE REDES I

APUNTES DE CLASES

PROFESOR PABLO ESTEVEZ

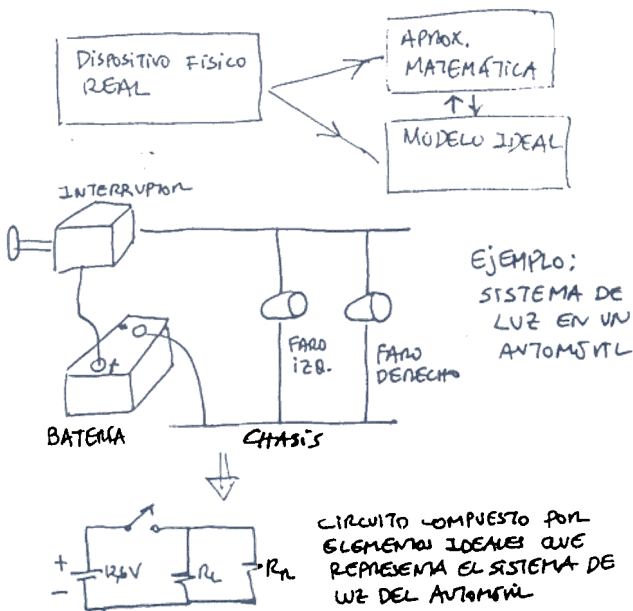


SEMESTRE OTOÑO 2006

TEORÍA DE CIRCUITOS CONCENTRADOS

CIRCUITO FÍSICO $\triangleq$ INTERCONEXIÓN DE DISPOSITIVOS ELÉCTRICOS REALES

DADO UN CIRCUITO FÍSICO INTERESA PREDECIR SU CONDUCTA EN TÉRMINOS DE VOLTAJES Y CORRIENTES.



SEA d : DIMENSIÓN DEL CIRCUITO

c : VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

λ LONGITUD DE ONDA DE LA MAYOR FRECUENCIA DE INTERÉS.

$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{f} = T$ PERÍODO DE LA MÁXIMA FRECUENCIA DE INTERÉS.

$\tau = \frac{d}{c}$ TIEMPO REQUERIDO POR LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PARA PROPAGARSE DE UN EXTREMO A OTRO DEL CIRCUITO.

CONDICIÓN $d \ll \lambda \Rightarrow \tau = \frac{d}{c} \ll \frac{\lambda}{c}$

$\tau \ll T$ TIEMPO DE PROPAGACIÓN ES DESPRECIABLE C/R AL PERÍODO DE LA MÁXIMA FRECUENCIA DE INTERÉS.

EJEMPLO 1

CIRCUITO DE AUDIO

$$f_{\max} = 25 \text{ KHz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{25 \times 10^3} = 12 \text{ km}$$

CIRCUITO $\triangleq$ INTERCONEXIÓN DE ELEMENTOS IDEALES

ELEMENTOS IDEALES: REPRESENTAN O APROXIMAN LAS PROPIEDADES DE ELEMENTOS FÍSICOS SIMPLES O FENÓMENOS FÍSICOS. ESTÁN PRECISAMENTE DEFINIDOS O CARACTERIZADOS

LA TEORÍA DE CIRCUITOS CONSISTE EN TOMAR UN MODELO DE CIRCUITO COMPUESTO POR ELEMENTOS IDEALES Y ENCONTRAR LOS VOLTAJES Y CORRIENTES EN CADA UNO DE ESTOS ELEMENTOS.

CIRCUITO CONCENTRADO:

SUS DIMENSIONES FÍSICAS SON PEQUEÑAS COMPARADAS CON LA LONGITUD DE ONDA ASOCIADA CON LA MAYOR FRECUENCIA DE INTERÉS.

DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA EL CIRCUITO SE REDUCE A UNA SINGULARIDAD PUNTUAL Y LAS ONDAS SE PROPAGAN INSTANTÁNEAMENTE POR EL CIRCUITO.

ELEMENTOS IDEALES NO TIENEN DIMENSIONES FÍSICAS NI ORIENTACIÓN ESPACIAL PREFERENCIAL.

EJEMPLO 2

CABLE COAXIAL PARA TV

$$f_{\max} = 1000 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 0.3 \text{ m}$$

SI LA APROXIMACIÓN CONCENTRADA NO ES VÁLIDA, DEBEN CONSIDERARSE LAS DIMENSIONES FÍSICAS DEL CIRCUITO

$\Rightarrow$ TEORÍA DE CIRCUITOS DISTRIBUIDOS (LÍNEAS DE TRANSMISIÓN, GUÍAS DE ONDA).

VARIABLES DE CIRCUITO: CORRIENTE Y VOLTAJE

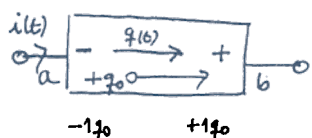
CORRIENTE ELÉCTRICA $\triangleq$ TASA DE CAMBIO NETO DE LA CARGA TRANSFERIDA A TRAVÉS DE UNA SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA DE UN ELEMENTO CONDUCTOR

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \text{Ampères} \triangleq \text{Coulomb/s}$$

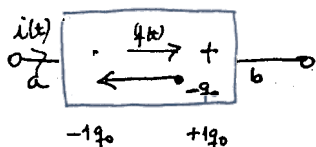
EN CONDUCTORES DE ALUMINIO O COBRE LA CORRIENTE CORRESPONDE AL MOVIMIENTO DE ELECTRONES LIBRES.

$$1 \text{ A} = 6.242 \times 10^{18} \text{ e/s}$$

$$q_e = -(1.602 \times 10^{-19}) \text{ Coulomb}$$



SI UNA CARGA POSITIVA $+q_0$ SE TRANSFIERE DE IZQUIERDA A DERECHA EN UN VOLUMEN PREVIAMENTE NEUTRO, SE ESTABLECE UN DIFERENCIAL DE CARGA.



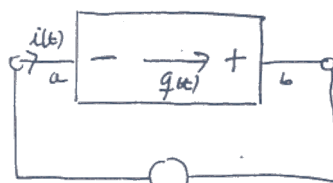
SE ESTABLECE LA MISMA CONDICIÓN ELECTROESTÁTICA QUE EN EL CASO ANTERIOR. SI HAY UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA SE PRODUCE UN CAMPO ELÉCTRICO.

POR RAZONES HISTÓRICAS SE UTILIZA UN FLUJO DE CARGAS POSITIVAS.

$i(t) > 0$ CUANDO UN FLUJO NETO DE CARGAS POSITIVAS ENTRA POR NUDO A Y SALE POR NUDO B

FÍSICAMENTE SE REQUIERE DE ENERGÍA PARA SOSTENER EL FLUJO DE CORRIENTE, USUALMENTE A TRAVÉS DE LA APLICACIÓN DE UNA FUENTE DE VOLTAJE $V(t)$ A TRAVÉS DEL ELEMENTO

LA FUENTE NO CREA CARGA SINO QUE LAS SEPARA. EL EFECTO SE PROPAGA A LA VELOCIDAD DE LA LUZ PERO LAS CARGAS SE MUVERN LENTAMENTE



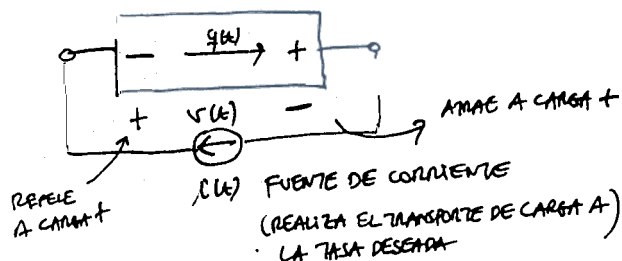
$+ V(t) -$ FUENTE DE VOLTAJE

$$V(t) = \frac{dW(t)}{dq(t)}$$

Volts = Joules/Coulomb
(TRABAJO POR UNIDAD DE CARGA)

CORRESPONDE AL TRABAJO $W(t)$ REQUERIDO PARA TRANSFERIR UNA CANTIDAD DE CARGA $q(t)$ A TRAVÉS DE UNA SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA DEL ELEMENTO CONTRA LA FUERZA ELÉCTRICA (DEBIDO A OTRAS CARGAS).

ALTERNATIVAMENTE



ELEMENTO CONCENTRADO DE 2-TERMINALES



RAMA CON NUDOS A Y B

LA CONDUCTA DEL ELEMENTO ESTÁ COMPLETAMENTE DETERMINADA POR SU CARACTERÍSTICA $V-i$.

LA CORRIENTE QUE INGRESA A UN TERMINAL ES IGUAL A LA CORRIENTE QUE SALE DEL OTRO TERMINAL

DIRECCIONES DE REFERENCIA ASOCIADAS PARA EL VOLTAJE Y LA CORRIENTE:

LA FLECHA INDICA LA DIRECCIÓN DE REFERENCIA PARA LA CORRIENTE

$i(t) > 0$ CUANDO FLUJO NETO DE CARGAS POSITIVAS ENTRA A LA RAMA EN EL NUDO A Y LA DEJA EN EL NUDO B.

• LAS MARCAS $\pm$ INDICAN LAS DIRECCIONES DE REFERENCIA PARA EL VOLTAJE

UNO CUANDO $V_A(t)$ Y $V_B(t)$ POTENCIALES MEDIDOS CON RESPECTO A LA MISMA REFERENCIA

CONVENCIÓN DE DIRECCIONES DE REFERENCIA ASOCIADAS:

UNA CORRIENTE POSITIVA ENTRA A LA RAMA POR EL TERMINAL MARCADO CON UN SIGNO $+$ Y DEJA LA RAMA POR EL TERMINAL MARCADO CON EL SIGNO $-$.

POTENCIA: TASA DE CAMBIO DE LA ENERGÍA APLICADA

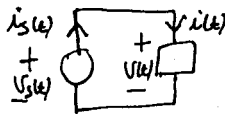
$$p(t) \triangleq \frac{dW(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dq(t)} \frac{dq(t)}{dt} = V(t) i(t) \text{ Watts}$$

AL USAR DIRECCIONES DE REFERENCIA ASOCIADAS, EL PRODUCTO $V(t)i(t)$ ES LA POTENCIA INSTANTÁNEA ENTREGADA A LA RAMA EN EL TIEMPO t (ABSORBIDA POR EL ELEMENTO)

$$\frac{dW}{dt} = p \rightarrow W = \int_{-\infty}^t p dt \text{ ENERGÍA EN JOULES}$$

CONSERVACIÓN DE POTENCIA:

POTENCIA SUMINISTRADA POR LA FUENTE = POTENCIA ABSORBIDA POR ELEMENTO 2-TERMINALES

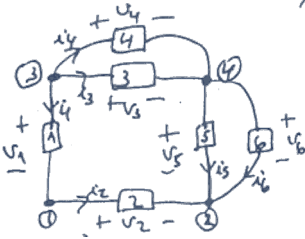


$$V_s(t) i_s(t) = V(t) i(t)$$

NOTACIÓN

ELEMENTOS DE 2 TERMINALES → RAMAS
 JUNTURA DE TERMINALES → NODOS
 VOLTAJE → VOLTAJE DE RAMA
 CORRIENTE → CORRIENTE DE RAMA

Ej:



4 NODOS: ①, ②, ③, ④

6 RAMAS: 1, 2, 3, 4, 5, 6

CORRIENTES DE RAMAS: $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$

VOLTAJES DE RAMAS: $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$

LEYES DE KIRCHHOFF

RESULTAN DE APROXIMACIONES DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL QUE DESCRIBEN LA TEORÍA DEL ELECTROMAGNETISMO SON VÁLIDAS PARA CIRCUITOS CONCENTRADOS.

- LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF (LVK)
- LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (LCK)

LVK

$$\sum V_m = 0 \quad (1)$$

BUCLE
 (TRAJECTORIA CERRADA QUE COMIENZA Y TERMINA EN EL MISMO NODO)

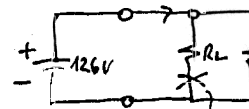
LA SUMA DE LAS CAIDAS DE VOLTAJE EN CUALQUIER TRAJECTORIA CERRADA ES CERO.

EL BUCLE DE UN CIRCUITO ES UN SISTEMA CONSERVATIVO, LA ENERGÍA NECESARIA PARA MOVER UNA CARGA EN TORNO A UN TRAJECTO CERRADO ES CERO. COMO EL VOLTAJE ES TRABAJO POR UNIDAD DE CARGA, EL VOLTAJE ALREDEDOR DEL BUCLE ES CERO.

EL VOLTAJE ES LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS, LUEGO SI SE COMIENZA Y TERMINA EN EL MISMO PUNTO LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ES CERO.

EL VOLTAJE EXPRESA EL POTENCIAL DE UN SISTEMA ELÉCTRICO PARA REALIZAR TRABAJO, ES DECIR MIDE LA CANTIDAD DE TRABAJO QUE SE REALIZA SI UNA CARGA FUERA MOVIDA DE UN PUNTO A OTRO.

Ej:

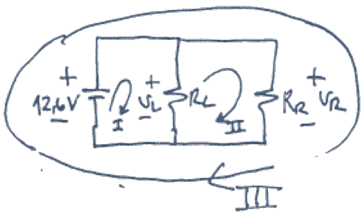


SISTEMA DE LUZ DEL AUTOMÓVIL

↑ AUMENTA EL FOCO SE QUEMÉ EL VOLTAJE SIGUE ESTANDO PRESENTE

APLICACIÓN DE LVK

SE DA UNA DIRECCIÓN DE REFERENCIA AL BUCLE, Y SE ASIGNA EL SIGNO + A LOS VOLTAJES DE RAMAS CUYAS DIRECCIONES DE REFERENCIA CONVIENEN CON LAS DEL BUCLE, DE OTRA FORMA ES -.



BUCLE I: $-126 + V_L = 0 \Rightarrow V_L = 126[V] \quad (a)$

BUCLE II: $-V_L + V_R = 0 \Rightarrow V_R = V_L$
 $V_R = 126[V]$

BUCLE III: $-126 + V_R = 0 \Rightarrow V_R = 126[V] \quad (b)$
 (EXTERNO)

LOS TRES ELEMENTOS TIENEN EL MISMO VOLTAJE, SE DICE QUE ESTÁN EN PARALELO.

NOTAS: • LVK EXPRESA LA LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

- LVK ES INDEPENDIENTE DE LA NATURALEZA DE LOS ELEMENTOS
- LVK IMPONE UNA RESTRICCIÓN LINEAL ENTRE LOS VOLTAJES DE RAMA DE UN BUCLE.

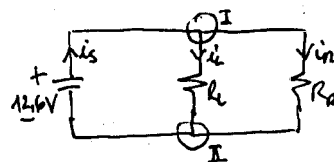
LCK

$$\sum_{\text{nodo}} i_n = 0 \quad (2)$$

LCK ES UNA EXPRESIÓN DE LA LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA. LA CARGA ES IMPERDIBLE, NO PUEDE PERDERSE NI CREARSE, SE CONSERVA.

LA SUMA DE TODAS LAS CORRIENTES QUE DEJAN (O ENTRAN) A UNA SUPERFICIE CERRADA S GAUSSIANA ES CERO V.E.

PARA APLICAR LCK HAY QUE DEFINIRSE UN SENTIDO POSITIVO PARA CORRIENTES ENTRANDO O SALIENDO DE LA SUPERFICIE.

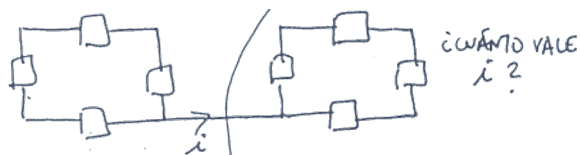
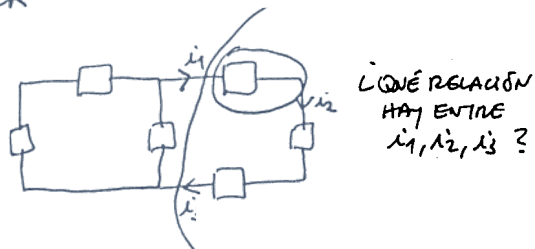


SEA + PARA CORRIENTE QUE ENTRAN

NODO I: $i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3$

NODO II: $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

EJ. LCK



- LCK SON ECS. ALGEBRAICAS LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES EN LAS CORRIENTES DE RAMAS

LCK ES INDEPENDIENTE DE LA NATURALEZA DE LOS ELEMENTOS. ESTOS PUEDEN SER LINEALES, NO-LINEALES, ACTIVOS, PASIVOS, VARIANTES O INVARIANTES EN EL TIEMPO

- LCK EXPRESA LA CONSERVACIÓN DE LA CARGA EN CUALQUIER MODO.

CASOS LÍMITES

- i) CIRCUITO ABIERTO $i=0 \forall U$
LUEGO $R \rightarrow \infty, G \rightarrow 0$



- ii) CORTO-CIRCUITO $U=0 \forall i$
LUEGO $R=0, G \rightarrow \infty$



EN TÉRMINOS DE POTENCIA

$$P(u) = U(u) \cdot i(u) = R \cdot i^2(u) \geq 0 \quad \text{si } R \geq 0$$

EL ELEMENTO RESISTIVO LINEAL-INVARIANTE SIEMPRE ABSORBE (DISIPA) POTENCIA. LA ENERGÍA ELÉCTRICA SE CONVIERTE EN CALOR O LUZ.

FÍSICAMENTE EL FLUJO DE CARGA QUE ATRAVIESA CUALQUIER MATERIAL ENCUENTRA UNA "RESISTENCIA" SIMILAR A LA FRICCIÓN MECÁNICA, DEBIDO A QUE LAS COLISIONES ENTRE ELECTRONES Y ÁTOMOS ESTACIONARIOS CONVIERTEN LA ENERGÍA ELÉCTRICA EN CALOR O LUZ.

LA RESISTENCIA DE UN MATERIAL DEPENDE DE:

- TIPO DE MATERIAL
- LONGITUD
- ÁREA TRANSVERSAL
- TEMPERATURA

ELEMENTOS IDEALES DE CIRCUITOS CONCENTRADOS

1.- ELEMENTOS RESISTIVOS

UN ELEMENTO DE 2-TERMINALES SE LLAMA UN ELEMENTO RESISTIVO SI PARA CUALQUIER INSTANTE DE TIEMPO t , SU VOLTAJE $U(t)$ Y SU CORRIENTE $i(t)$ SATISFACEN UNA RELACIÓN DEFINIDA POR UNA CURVA EN EL PLANO $U-i$ (O $i-U$).

A ESTA CURVA SE LE LLAMA LA CARACTERÍSTICA DEL ELEMENTO RESISTIVO EN EL TIEMPO t .

HAY 4 CATEGORÍAS DE ELEMENTOS RESISTIVOS:

- LINEAL O NO-LINEAL
- INVARIANTE O VARIANTE EN EL TIEMPO

a) ELEMENTOS RESISTIVOS LINEALES INVARIANTES

LEY DE OHM

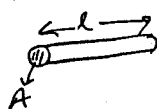
$$U(t) = R \cdot i(t) \quad \text{O} \quad i(t) = G \cdot U(t)$$

DONDE R : RESISTENCIA $[\Omega]$ $G = \frac{1}{R}$ CONDUCTANCIA $[S]$
Ohms = Volts / Amperes $[U]$ mV



CARACTERÍSTICA ES LINEAL-INV. YA QUE ES UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN $\forall t$.

PARA UN CONDUCTOR UNIDIRECCIONAL DE GEOMETRÍA SIMPLE

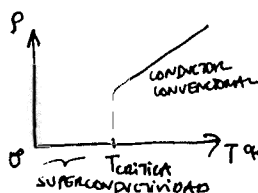


$$R = \rho \frac{l}{A}$$

→ MIENTRAS MÁS LARGO MÁS COLISIONES
→ MÁS GRANDE FACILITA FLUJO $\vec{E}$

ρ : RESISTIVIDAD $\Omega \cdot m$

$\rho_{\text{cobre}} = 1,7 \times 10^{-8}$ $\rho_{\text{aluminio}} = 2,8 \times 10^{-8}$ $\rho_{\text{plata}} = 1,6 \times 10^{-8}$	CONDUCTORES	COBRE ES MALLEABLE, DÚCTIL, ASEGURABLE, BAJO COSTO, BUENAS PROPIEDADES TÉRMICAS
$\rho_{\text{germano}} = 0,45$ $\rho_{\text{silicio}} = 2.500$	SEMI-CONDUCTORES	SU RESISTIVIDAD PUEDE CONTROLARSE AÑADIENDO OTROS ELEMENTOS: GALIO, ZINC, P
$\rho_{\text{papel}} = 10^{10}$ $\rho_{\text{mica}} = 5 \cdot 10^{11}$ $\rho_{\text{vidrio}} = 10^{12}$	AISLADORES	



SUPERCONDUCTORES

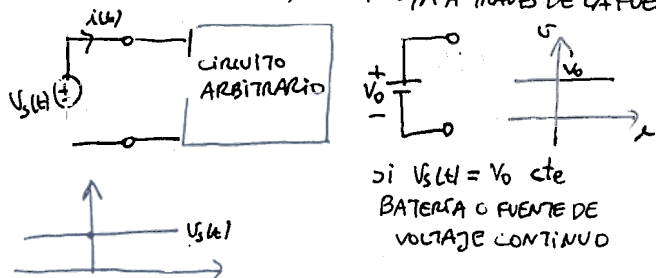
DESCUBIERTA EN 1911 A 23°K
EN 1986 SE SUPERAN 30°K
Y LUEGO 95K-125K

ZONA DE RESISTENCIA CERO
EFECTO COOPER: EXISTE UN MODO DE CONDUCCIÓN DISTINTO DONDE LOS e^- VIAJAN DE A PARES

EJ. MOTOR SUPERCONDUCTOR ROCKWELL 750 KW (OCT 2000) 30K
ESTACION ESTACIONARIO DE COBRE
MOTOR ENROLLADO SUPERCONDUCTOR ENFRIADO CON HELIO GASEOSO A

FUENTES INDEPENDIENTES IDEALES

- FUENTE INDEPENDIENTE DE VOLTAJE: ELEMENTO DE 2-TERMINALES QUE MANTIENE UN VOLTAJE DETERMINADO $V_S(t)$ A TRAVÉS DE LOS TERMINALES DE UN CIRCUITO ARBITRARIO AL CUAL ESTÁ CONECTADO, CUALQUIERA QUE SEA LA CORRIENTE $i(t)$ QUE FLUYA A TRAVÉS DE LA FUENTE.

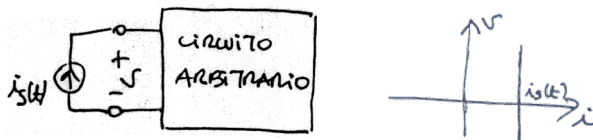


UNA FUENTE INDEPENDIENTE DE VOLTAJE SE CONSIDERA COMO UN ELEMENTO RESISTIVO NO-LINEAL CONTROLADO POR CORRIENTE

- NO-LINEAL PORQUE RECTA NO PASA POR EL ORIGEN
- CONTROLADA POR CORRIENTE: PARA CADA VALOR DE CORRIENTE CORRESPONDE UN ÚNICO VOLTAJE
- VARIANTE EN EL TIEMPO SI $V_S(t)$ NO ES CONSTANTE P.EJ. SINUSOIDE
- SI $V_S(t) = 0 \forall t$ ES UN CORTO-CIRCUITO $\begin{matrix} + \\ V_{S(t)=0} \\ - \end{matrix}$

FUENTE INDEPENDIENTE DE CORRIENTE:

ELEMENTO DE 2-TERMINALES QUE MANTIENE UNA CORRIENTE DETERMINADA $i_S(t)$ HACIA EL CIRCUITO ARBITRARIO AL QUE ESTÁ CONECTADA, ES DECIR CUALQUIERA QUE SEA EL VOLTAJE $V(t)$ A TRAVÉS DE LOS TERMINALES DEL CIRCUITO, LA CORRIENTE QUE ENTRA AL CIRCUITO ES $i_S(t)$.



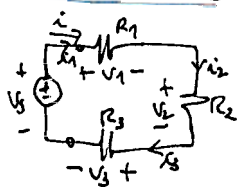
UNA FUENTE INDEPENDIENTE DE CORRIENTE PUEDE CONSIDERARSE COMO UN ELEMENTO RESISTIVO NO-LINEAL VARIANTE EN EL TIEMPO CONTROLADO POR VOLTAJE

SI $i_S(t) = 0 \forall t$ LA FUENTE DE CORRIENTE SE REDUCE A UN CIRCUITO ABIERTO

$P(t) = V(t)i_S(t)$ ES LA POTENCIA ENTREGADA POR LA FUENTE AL CIRCUITO EXTERNO

EL INTERÉS EN LA FUENTE DE CORRIENTE SE DEBE PRINCIPALMENTE A LOS DISPOSITIVOS SEMICONDUCTORES COMO EL TRANSISTOR.

DIVISOR DE VOLTAJE



$$\text{LVR } V_S = V_1 + V_2 + V_3 \quad (1)$$

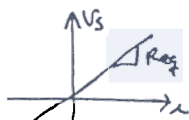
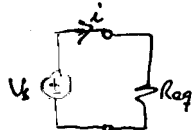
$$\text{LCK } i = i_1 = i_2 = i_3 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{EC. ELEMENTOS } V_1 &= R_1 i_1 \quad (3) \\ V_2 &= R_2 i_2 \quad (4) \\ V_3 &= R_3 i_3 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_S = R_1 i + R_2 i + R_3 i$$

$$V_S = (R_1 + R_2 + R_3) i$$

SE DEFINE $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$ RESISTENCIA EQUIVALENTE DE LA CONEXIÓN SERIE



$$\Rightarrow i = \frac{V_S}{R_{eq}}$$

$$V_1 = R_1 i = \left(\frac{R_1}{R_{eq}}\right) V_S$$

$$V_2 = R_2 i = \left(\frac{R_2}{R_{eq}}\right) V_S$$

$$V_3 = R_3 i = \left(\frac{R_3}{R_{eq}}\right) V_S$$

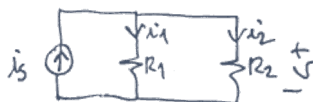
REGLA DE DIVISIÓN DE VOLTAJE

$$V_R = \left(\frac{R_k}{R_{eq}}\right) V_{\text{Total}} \quad R = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

EL VOLTAJE SE DIVIDE ENTRE LAS RESISTENCIAS SERIE EN PROPORCIÓN A SUS RESISTENCIAS SOBRE LA RESISTENCIA EQUIVALENTE DE LA CONEXIÓN SERIE.

DIVISOR DE CORRIENTE



$$\text{LVR } V = V_1 = V_2 \quad (1)$$

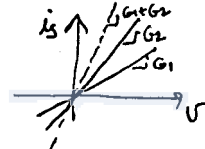
$$\text{LCK } i_S = i_1 + i_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{EC. ELEMENTOS } i_1 &= G_1 V_1 \quad (3) \\ i_2 &= G_2 V_2 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_S = (G_1 + G_2) V$$

$$\text{SE DEFINE } G_{eq} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow R_{||} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{COMBINACIÓN PARALELA DE RESISTENCIAS}$$



LA CORRIENTE A TRAVÉS DE LA CONDUCTANCIA N-ÉSIMA ES

$$i_n = G_n V = \frac{G_n i_s}{G_1 + G_2} \quad n=1,2$$

REGLA DE DIVISIÓN DE CORRIENTE

$$i_n = \frac{G_n i_s}{G_{eq}}, \quad G_{eq} = \sum_{n=1}^N G_n$$

LA CORRIENTE SE DIVIDE ENTRE CONDUCTANCIAS EN PARALELO EN PROPORCIÓN AL VALOR DE SUS CONDUCTANCIAS SOBRE LA CONDUCTANCIA EQUIVALENTE DE LA CONEXIÓN PARALELA.

EJ) CIRCUITO DE LUZ DEL AUTOMÓVIL

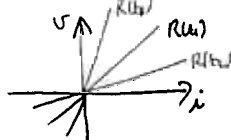


ENCONTRAR CORRIENTE i Y LA POTENCIA SUMINISTRADA POR LA FUENTE

$$R_{eq} = R_1 = \frac{5.25 \times 5.25}{2 \times 5.25} = \frac{5.25}{2} \quad i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12.6}{5.25} = 4.8 \text{ CA} \quad P = V \cdot i = 60.5 \text{ W}$$

ELEMENTOS RESISTIVOS LINEALES VARIANTES

LEY DE OHM $V(t) = R(t) i(t)$ o $i(t) = G(t) V(t)$
CON $R(t) = \frac{1}{G(t)}$

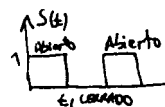
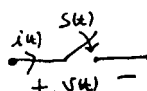


EJ1. POTENCIÓMETRO

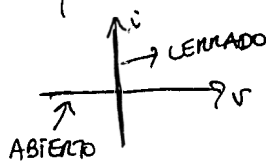


CONTACTO MÓVIL SE DESPLAZA SIGUIENDO UNA FUNCIÓN DE t

EJ2 INTERRUPTOR IDEAL (SWITCH)



ES UN CIRCUITO ABIERTO CUANDO ESTÁ ABIERTO Y UN CORTO-CIRCUITO CUANDO ESTÁ CERRADO



$$P = V \cdot i = 0 \quad \forall t$$

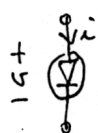
EN LA PRÁCTICA UN SWITCH TIENE UNA CORRIENTE MÁXIMA AL ESTAR CERRADO Y UN VOLTAGE MÁXIMO AL ESTAR ABIERTO.

ELEMENTOS RESISTIVOS NO-LINEALES INVARIANTES

EJ1 DIODO DE GERMANIO

LA CORRIENTE DE SATURACIÓN ES UNA FUNCIÓN NO-LINEAL DEL VOLTAGE

$$i(t) = I_s (e^{qV(t)/kT} - 1)$$



$$i = f(V)$$

I_s CTE: CORRIENTE DE SATURACIÓN INVERSA CUANDO $V < 0$. ($\sim 10^{-4} \text{ CA}$)

q : CARGA DE UN ELECTRÓN

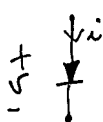
k : CTE DE BOLZEMANN

T : $^{\circ}\text{C}$ EN GRADOS KELVIN

$$\frac{kT}{q} \sim 0.026 \text{ CV} \text{ a } 25^{\circ}\text{C}$$

ES UN ELEMENTO RESISTIVO CONTROLADO POR VOLTAGE.

EJ2. DIODO IDEAL



• $i = 0$ si $V < 0$
CIRCUITO ABIERTO AL ESTAR POLARIZADO EN REVERSA

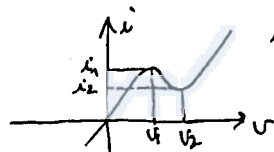
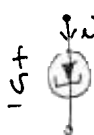
• Si $i > 0$, $V = 0$

CORTO-CIRCUITO CUANDO ESTÁ CONDUciendo

LA POTENCIA ENTREGADA AL DIODO IDEAL ES

$$P(t) = V(t) i(t) = 0 \quad \forall t$$

EJ3 DIODO DE TÚNEL

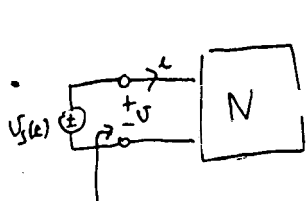


$i = f(V)$ CONTROLADO POR VOLTAGE

PARA $V_1 < V < V_2$ LA PENDIENTE DE LA LÍNEA ES NEGATIVA, CARACTERÍSTICA ÚTIL EN AMPLIFICADORES Y OSCILADORES.

PARA $i_2 < i < i_1$, UNA CORRIENTE i CORRESPONDE A TRES VALORES DIFERENTES DE V .

CIRCUITOS EQUIVALENTES

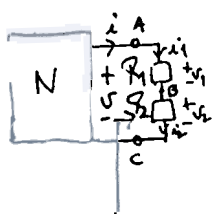


SEA N UN UNA-PUERTA RESISTIVO Δ
CIRCUITO DE 2-TERMINALES
COMPUESTO POR ELEMENTOS RESISTIVOS
DE 2-TERMINALES

LA CARACTERÍSTICA $V-i$ DEL UNA-PUERTA SE CONOCE
COMO CARACTERÍSTICA DE PUNTO MOTRIZ.

DOS UNA-PUERTA RESISTIVOS SON EQUIVALENTES SI Y SOLO SI
SUS CARACTERÍSTICAS $V-i$ SON IGUALES.

CONEXIÓN SERIE



LVR $V = V_1 + V_2$
LCK $i = i_1 = i_2$

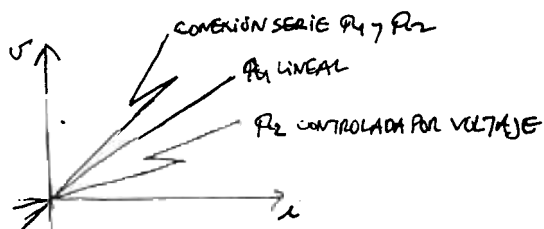
SE LLAMA CONEXIÓN SERIE DE LOS ELEMENTOS R_1 Y R_2
AL UNA PUERTA CUYOS TERMINALES SON LOS NODOS
A Y C.

LA CARACTERÍSTICA DE LA CONEXIÓN SERIE SE PUEDE
OBTENER GRÁFICAMENTE, PARA CADA VALOR DE i SE
DEBEN SUMAR LOS VALORES DE VOLTAJE DE LAS
CARACTERÍSTICAS DE R_1 Y R_2 .

ANALÍTICAMENTE SE PUEDE DETERMINAR LA
CARACTERÍSTICA DEL ELEMENTO RESISTIVO EQUIVALENTE
DE LA CONEXIÓN SERIE DE R_1 Y R_2 SOLO SI AMBOS
SON CONTROLADOS POR CORRIENTE.

SEA $V_1 = f_1(i_1)$, $V_2 = f_2(i_2)$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = f_1(i) + f_2(i) = f(i)$



GENERALIZANDO PARA m ELEMENTOS RESISTIVOS
CONTROLADOS POR CORRIENTE

$V_k = f_k(i_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$

EL EQUIVALENTE DE LA CONEXIÓN SERIE ES

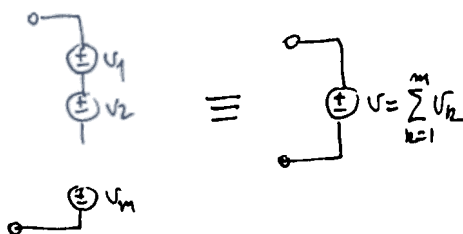
$V = f(i) = \sum_{k=1}^m f_k(i) \quad \forall i$

EJ. 1 RESISTENCIAS LINEALES

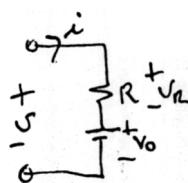
$V_k = R_k i_k \quad k = 1, 2, \dots, m$

$\Rightarrow V = R i \quad \text{CON } R = \sum_{k=1}^m R_k$

EJ. 2 FUENTES DE VOLTAJE (ELEMENTO RESISTIVO CONTROLADO POR CORRIENTE)

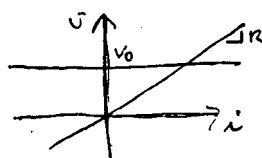


EJ. 4 RESISTENCIA LINEAL Y FUENTE DE VOLTAJE



LVR $V = V_R + V_0$
 $V = R i + V_0 \quad (1)$

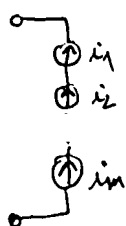
LCK i ES LA MISMA PARA
AMBOS ELEMENTOS



LA CARACTERÍSTICA $V-i$ DE
LA CONEXIÓN SERIE ES LA
SUMA DE LAS CARACTERÍSTICAS

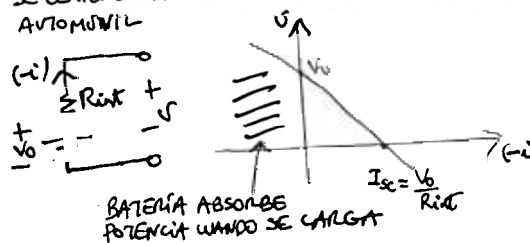
DE (1) $V = 0 \Rightarrow i = -\frac{V_0}{R}$
CORRIENTE DE CORTO-CIRCUITO

EJ. 3 FUENTES DE CORRIENTE

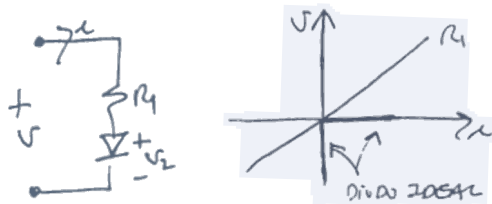


VIOLA LCK, SALVO
QUE SEAN IDENTICAS
 $i_1 = i_2 = \dots = i_m$
SINO NO TIENE
SENTIDO FÍSICO.

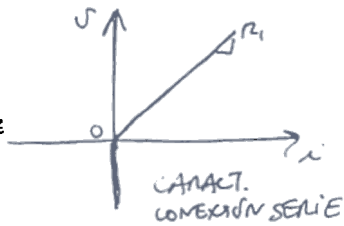
SI SE DIBUJA LA CARACTERÍSTICA EN EL PLANO $(-i)V$
SE OBTIENE LA CARACTERÍSTICA DE LA BATERÍA DE UN
AUTOMÓVIL



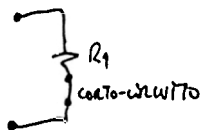
EJ5 RESISTENCIA LINEAL Y DIODO IDEAL



SE DEBE CONSIDERAR
CADA SEGMENTO DEL
DIODO SEPARADAMENTE



PARA $i > 0$ EL DIODO ES UN CORTO-CIRCUITO

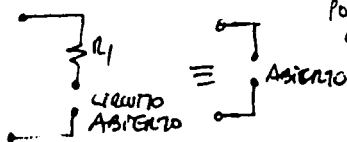


$\Rightarrow$ SE SUMAN LAS ORDENADAS

$$V = R_1 i + V_D \approx 0$$

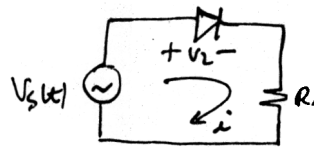
$$V = R_1 i$$

PARA $V < 0$ EL DIODO ES UN CIRCUITO ABIERTO



POR LO TANTO LA
CONEXIÓN SERIE ES
UN CIRCUITO ABIERTO.

CIRCUITO RECTIFICADOR DE MEDIA ONDA

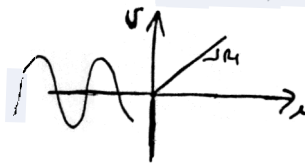
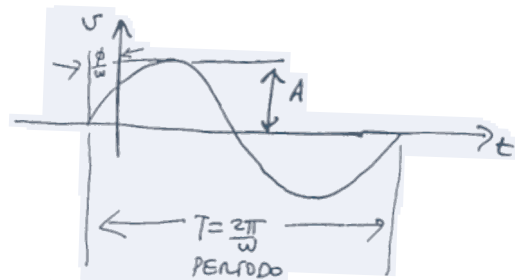


SEA $V_s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ SINUSOIDE

A: AMPLITUD

ω : FRECUENCIA ANGULAR EN RAD/S

ϕ : FASE EN RADIANES



¿CUAL SERÁ LA FORMA DE
ONDA DE LA CORRIENTE?

- Si $V < 0 \Rightarrow i = 0$
- Si $i > 0 \Rightarrow i = V/R_1$



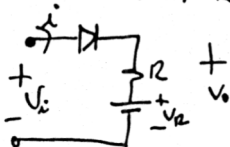
RECTIFICACIÓN CONVIerte SEÑAL SINUSOIDAL DE
VALOR MEDIO CERO A UNA SEÑAL DE VALOR MEDIO
DISTINTO DE CERO.

$$\text{VALOR MEDIO} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega t) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t$$

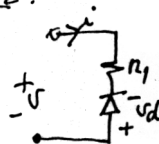
$$\text{SINUSOIDE} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin \omega t d\omega t = 0$$

$$\text{RECTIF. 1/2 ONDA} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{A}{R_1} \sin \omega t d\omega t = \frac{A}{R_1 \pi}$$

PROPUESTO 1: a) ENCONTRAR CARACTERÍSTICA $V-i$
DEL SIGUIENTE CIRCUITO SERIE
b) ENCONTRAR V_{D1} CUANDO $V_s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
CON $|A| > V_{D2}$



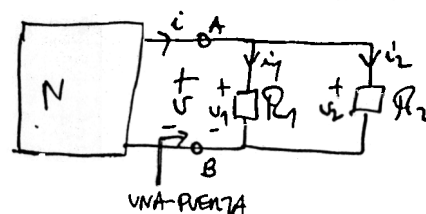
PROPUESTO 2.



ENCONTRAR CARACTERÍSTICA
 $V-i$ CUANDO SE INVIERTE LA
POSICIÓN DEL DIODO.

NOTA: DIODO IDEAL NO ES
DISPOSITIVO BILATERAL

CONEXIÓN PARALELA DE ELEMENTOS RESISTIVOS



$$\text{LVR} \quad V = V_1 = V_2$$

$$\text{LCR} \quad i = i_1 + i_2$$

LA CARACTERÍSTICA DE LA CONEXIÓN PARALELA DE
 R_1 Y R_2 SE OBTIENE SUMANDO, PARA CADA VOLTAJE
LOS VALORES DE LAS CORRIENTES.

ANALÍTICAMENTE, SI R_1 Y R_2 SON CONTROLADAS POR
VOLTAGE

$$i_1 = g_1(V_1), \quad i_2 = g_2(V_2)$$

$$\Rightarrow i = i_1 + i_2 = g_1(V) + g_2(V) = g(V) \quad \forall V$$

LA CONEXIÓN PARALELA DE M-ELEMENTOS RESISTIVOS CONTROLADOS POR VOLTAJE CON CARACTERÍSTICA

$$i_k = g_k(v_k), \quad k=1, 2, \dots, m$$

ES EQUIVALENTE A UNÚNICO ELEMENTO RESISTIVO CONTROLADO POR VOLTAJE CON CARACTERÍSTICA $i = g(v) = \sum_{k=1}^m g_k(v) \quad \forall v$.

EJ.1 RESISTENCIAS LINEALES INVARIANTES

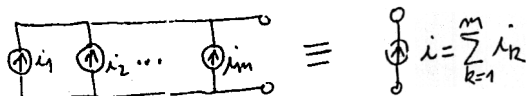
$$i_k = G_k v_k \quad k=1, 2, \dots, m$$

$$\Rightarrow i = G v, \text{ donde } G = \sum_{k=1}^m G_k$$

G ES LA CONDUCTANCIA EQUIVALENTE

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m G_k} \quad \text{o} \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{R_k}$$

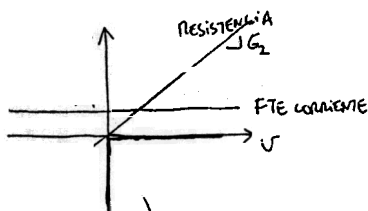
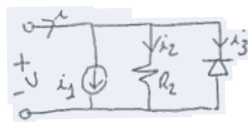
EJ.2 FUENTES DE CORRIENTE



EJ 3 FUENTES DE VOLTAJE

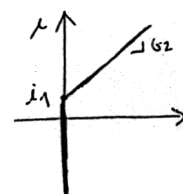
VIOLA LK SALVO QUE TODOS LOS VOLTAJES SEAN IGUALES

EJ 4 DIODO IDEAL, RESISTENCIA Y FUENTE DE CORRIENTE



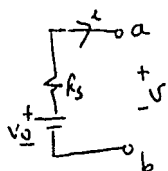
PARA $v > 0, i_3 = 0$ CABIERTO

PARA $i_3 < 0, v = 0$ CORTO-CIRCUITO



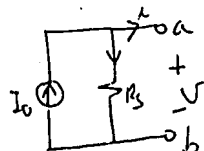
CARACTERÍSTICA DE LA CONEXIÓN PARALELA

EQUIVALENTES DE THÉVENIN Y NORTON



EQUIVALENTE DE THÉVENIN

$$LK \quad v = v_0 - R_s i$$



EQUIVALENTE DE NORTON

$$LK \quad i = I_0 - \frac{v}{R_s}$$

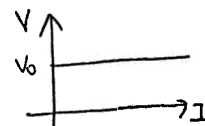
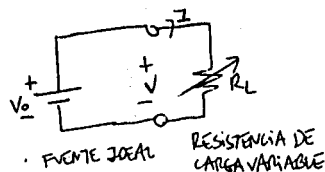
$$\Rightarrow i = \frac{v_0}{R_s} - \frac{v}{R_s} \quad \text{with } I_0 = \frac{v_0}{R_s}$$

LOS DOS CIRCUITOS SON EQUIVALENTES PORQUE TIENEN LA MISMA CARACTERÍSTICA EN EL PLANO $i-v$

EN ALGUNOS CASOS ES MÁS CONVENIENTE USAR FUENTES DE VOLTAJE Y EN OTROS FUENTES DE CORRIENTE. LOS EQUIVALENTES DE THÉVENIN-NORTON DAN ESTA FLEXIBILIDAD.

FUENTE PRÁCTICA DE VOLTAJE

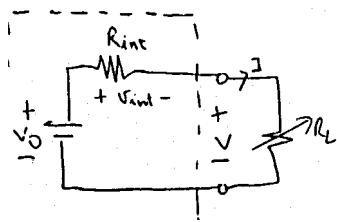
UNA FUENTE IDEAL DE VOLTAJE PROVEE UN VOLTAJE CONSTANTE A TRAVÉS DE SUS TERMINALES SIN IMPORTAR LA CORRIENTE QUE SE EXTRAIGA DE ÉSTA.



EN UNA FUENTE PRÁCTICA SI $R_L \downarrow \Rightarrow I \uparrow$ y $V \downarrow$

LA CAÍDA DE VOLTAJE RESPECTO DEL VALOR IDEAL v_0 DE LA FUENTE SE PUEDE MODELAR COMO UN ELEMENTO DENTRO DE LA FUENTE. EL ELEMENTO ES TAL QUE $v_{\text{interior}} \uparrow$ SI $I \uparrow$, OSEA ES UNA RESISTENCIA INTERNA R_{int} .

NOTA R_{int} NO ES UN ELEMENTO REAL, NI TIENE TERMINALES ACCESIBLES, ES SOLO UN MODELO

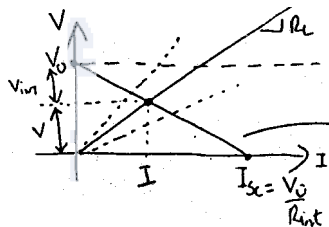


MODELO DE UNA BATERIA

LVK $V_0 = V_{int} + V$
 $V_0 = R_{int}I + V$
 $V = V_0 - R_{int}I$ (1)

PARA LA BATERIA

$V = R_L I$ (2)
 PARA LA CARGA



RECTA DE CARGA
 CUALQUIERA QUE SEA
 R_L , TODAS LAS
 SOLUCIONES DEBEN CAER
 EN LA CARACT. DE LA FUENTE

PARÁMETROS:

- V_0 ES EL VOLTAJE DE CIRCUITO ABIERTO DE LA FUENTE SE PUEDE MEDIR CON UN VOLTMETRO SIN CARGA ($R_L \rightarrow \infty$)
 $V_{oc} = V_0$
- R_{int} RESISTENCIA INTERNA DEL MODELO DEL CIRCUITO DE LA FUENTE
- I_{sc} CORRIENTE DE CORTO-CIRCUITO ($R_L \rightarrow 0$)

$$R_{int} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

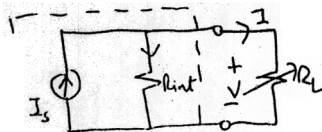
EL PUNTO DE OPERACIÓN ES LA INTERSECCIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE ECS. (1) Y (2) SE TIENE QUE

$$I = \frac{V_0}{R_{int} + R_L}$$

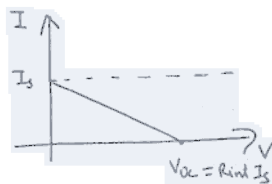
$$V = \frac{R_L}{R_{int} + R_L} V_0$$

(DIVISIÓN DE VOLTAJE)

ANÁLOGAMENTE EL MODELO DE UNA FUENTE PRÁCTICA DE CORRIENTE INCLUYE UNA RESISTENCIA INTERNA R_{int} CONECTADA EN PARALELO CON LA FUENTE IDEAL I_s



LKV
 $I = I_s - \frac{V}{R_{int}}$



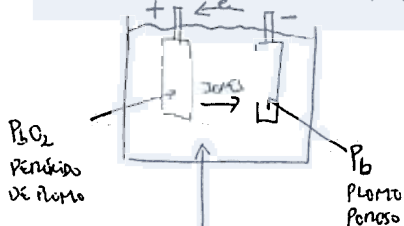
$I = 0 \Rightarrow V_{oc} = R_{int} I_s$
 $V = 0 \Rightarrow I_{sc} = I_s$
 IDEAL ($R_{int} \rightarrow \infty$)

$$R_{int} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

BATERIA DE AUTOMÓVIL

UNA BATERIA ES LA COMBINACIÓN DE 2 O MÁS PILAS (CELAS) CONVIERTE ENERGÍA QUÍMICA EN ENERGÍA ELÉCTRICA.

CELDA PLOMO-ÁCIDO: 2 ELECTRODOS + ELECTROLITO



ELECTROLITO: ÁCIDO-SULFÚRICO + AGUA
 ES FUENTE DE CONTACTO Y DE JONES PARA CONDUCCIÓN ENTRE TERMINALES

DESCARGA: CUANDO SE CONECTA A UN CIRCUITO COMIENZA UNA REACCIÓN QUÍMICA QUE CAUSA QUE SEAN REPELIDOS DE UNA PLACA (+) Y ATRAÍDOS POR LA OTRA (+). AMBAS PLACAS CAMBIAN A SULFATO DE PLOMO.

CARGA: PASANDO CORRIENTE EN LA DIRECCIÓN OPUESTA SE INVIERTEN LAS REACCIONES QUÍMICAS. LAS PLACAS VUELVEN A SU COMPOSICIÓN ORIGINAL DE PLOMO Y PÉOXIDO DE PLOMO, Y SE REESTABLECE LA CONCENTRACIÓN DE ÁCIDO SULFÚRICO.

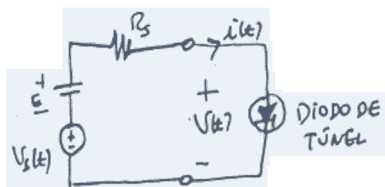
BATERIA DE AUTOMÓVIL (ÁCIDO-PLOMO) CONSISTE EN 6 CELDAS DE 2 VOLTS CONECTADAS EN SERIE $\Rightarrow 12V$

CUANDO EL MOTOR ESTÁ FUNCIONANDO, ÉSTE CARGA LA BATERIA A 14V. CARGA PROMEDIO ES DE 30W A 1KW, PEAK 2KW. LA BATERIA PROVEE LA POTENCIA DE PARTIDA.

PARA EL AÑO 2005 SE ESTIMA UN PEAK DE 12KW POR UN CONSUMO CRECIENTE DE ENERGÍA. SE REQUIERE SUBIR A 42V O 48V. SE ESTÁN PROPONIENDO ESTÁNDARES.

- SISTEMA DE NAVEGACIÓN
- AIRE ACONDICIONADO
- SONIDO Y TOCA CD
- POSICIONAMIENTO ELECTRÓNICO DE ASIENTOS
- CALENTADOR DE ASIENTO, MANUBRIO
- VEHÍCULOS ELÉCTRICOS

ANÁLISIS DE SEÑAL PEQUEÑA



$$|v_s(t)| \ll E \quad \forall t$$

v_s : SEÑAL

E : POLARIZACIÓN (FUENTE CONTINUA)

DETERMINAR $v(t)$ e $i(t)$ PARA EL DIODO DE TÚNEL.

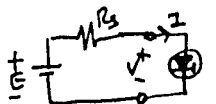
→ i ES LA MISMA PARA TODOS LOS ELEMENTOS

$$E + v_s(t) = R_S i(t) + v(t) \quad \forall t$$

$$E + v_s(t) = R_S g[v(t)] + v(t) \quad \forall t$$

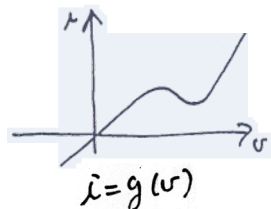
PROBLEMA SE RESUELVE SEPARANDO EL EFECTO DE LAS DOS FUENTES

① HACER $v_s(t) = 0 \quad \forall t$, LA FUENTE INDEPENDIENTE SE REEMPLAZA POR UN CORTO-CIRCUITO



$$LVK \quad E - R_S I = V$$

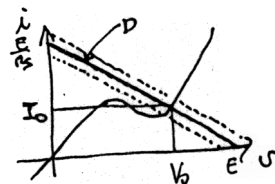
CIRCUITO DE POLARIZACIÓN



$$E - R_S I = V \quad (1)$$

$$I = g(V) \quad (2)$$

SE PUEDE RESOLVER GRÁFICAMENTE



LA INTERSECCIÓN DE AMBAS CURVAS DA LA SOLUCIÓN

$Q = (V_0, I_0)$ PUNTO DE OPERACIÓN

$$\text{EN } Q \quad E - R_S I_0 = V_0 \quad (1a)$$

$$I_0 = g(V_0) \quad (2a)$$

② $v_s(t) \neq 0$

$$E + v_s(t) - R_S i(t) = v(t) \quad (1b)$$

$$i(t) = g[v(t)] \quad (2b)$$

PARA CADA t SE TIENE UNA LINEA RECTA PARALELA A (1); SOBRE D SI $v_s(t) > 0$ Y BAJO D SI $v_s(t) < 0$.

PARA SEÑAL PEQUEÑA:

$$v(t) = V_0 + v_1(t)$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t)$$

SI $|v_s(t)| \ll E$ LA SOLUCIÓN ESTÁ EN LA VECINDAD DE Q .

DE (2b)

$$i(t) = g[v(t)] \Rightarrow I_0 + i_1(t) = g[V_0 + v_1(t)]$$

$$\approx g(V_0) + \left. \frac{dg}{dv} \right|_{V_0} v_1(t)$$

APROXIMACIÓN DE TAYLOR DE PRIMER ORDEN.

DE (2a) SE TIENE $I_0 = g(V_0)$, LUEGO

$$i_1(t) = \left. \frac{dg}{dv} \right|_{V_0} v_1(t) \Rightarrow i_1(t) = G v_1(t)$$

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{CONDUCTANCIA DE SEÑAL PEQUEÑA}$$

(NOTAR QUE G PUEDE SER NEGATIVA) EN ESTE CASO

→ ES LA PENDIENTE DE LA CARACTERÍSTICA DEL DIODO DE TÚNEL EN Q .

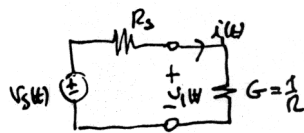
$$\text{DE (1b)} \quad E + v_s(t) - R_S i(t) = v(t)$$

$$E + v_s(t) - R_S [I_0 + i_1(t)] = V_0 + v_1(t)$$

$$\Rightarrow v_s(t) - R_S i_1(t) = v_1(t)$$

$$i_1(t) = G v_1(t)$$

CIRCUITO EQUIVALENTE DE SEÑAL PEQUEÑA



$$i_1(t) = \frac{v_s(t)}{R_S + R}$$

$$v_1(t) = \frac{R v_s(t)}{R_S + R}$$

PARA HALLAR EL CIRCUITO DE SEÑAL PEQUEÑA SE DEBE HACER $E = 0$ EN EL CIRCUITO ORIGINAL, Y REEMPLAZAR EL ELEMENTO NO-LINEAL POR SU LINEALIZACIÓN EN TORNO DEL PUNTO DE OPERACIÓN Q .

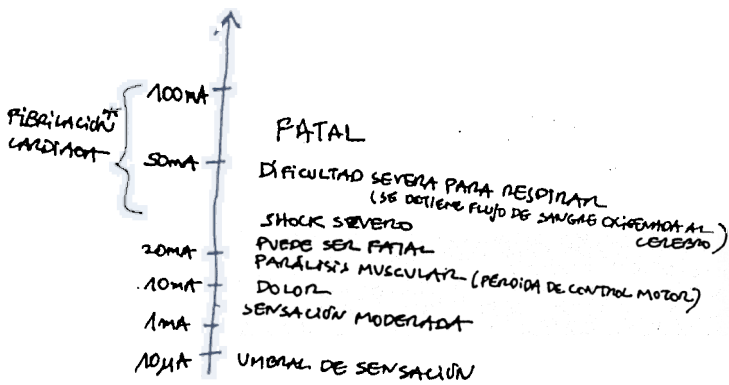
SI $R \ll R_S$ PARA UNA ADECUADA ELECCIÓN DE R_S SE PUEDE HACER QUE

$$v_1 \gg v_s$$

$$\text{P.EJ.} \quad R = -0.99, R_S = 1.00 \Rightarrow v_1 = -99 v_s$$

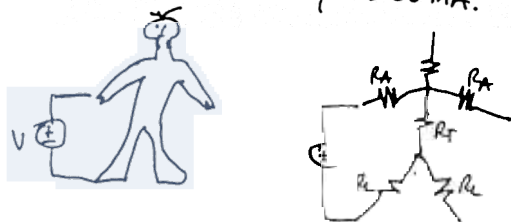
⇒ AMPLIFICACIÓN DE VOLTAJE Y DE POTENCIA

ESECTOS FISIOLOGICOS DE LA CORRIENTE ELECTRICAT



FIBRILACIÓN CARDÍACA: FIBRAS DEL MIOCARDIO SE CONTRAJEN CAÓTICAMENTE.

ACCIDENTES FATALES PUEDEN OCURRIR DESDE 70V, EN PARTICULAR 220VAC Y 25-30mA.



MODELO ELÉCTRICO DEL CUERPO HUMANO

RESISTENCIA DEL CUERPO 10KΩ a 50KΩ
PERO $R \downarrow$ SI LA PIEL ESTÁ MOJADA O CORROIDA
 $I = \frac{V}{R} \uparrow$

Solución: Poner el chasis a tierra, a través de un tercer conductor del enchufe de conexión.

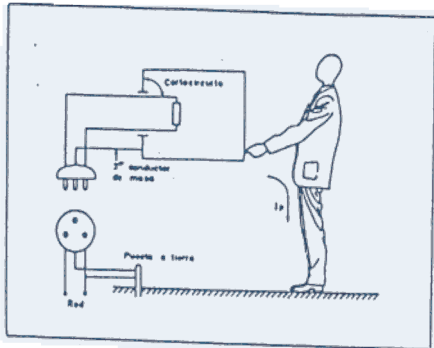


Figura 20. Disposición del conductor de puesta a tierra

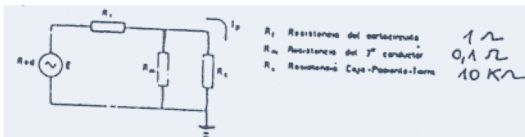


Figura 19. Circuito equivalente del caso de la figura

$$I_2 = \frac{E \cdot \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$\approx \frac{E}{R_1 + R_2(1 + \frac{R_2}{R_3})} \approx \frac{E}{10R_2}$$

Si $R_3 = 0,1\Omega \Rightarrow I_2 \approx 2mA$

SHOCK ELÉCTRICO

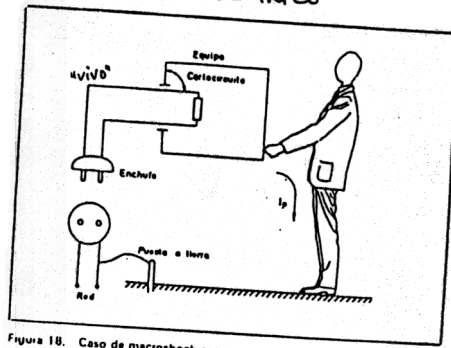
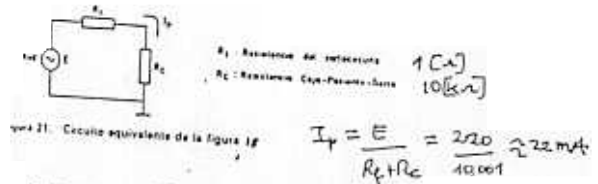


Figura 18. Caso de macroshock con equipo sin toma de tierra



Esta corriente provocará al menos un movimiento reflejo.

Si las partes metálicas de un equipo no están puestas a tierra, un corto-circuito ocasional o la pérdida de aislamiento del cable de alimentación con el chasis, pueda colocar a éste a la tensión de la red.

TIERRA:

EL TERCER CABLE, TIERRA, NO LLEVA CORRIENTE. ESTÁ CONECTADO A PICAS PLANTADAS EN EL TERRENO Y SIRVE COMO PROTECCIÓN.

SI OCURRIERA UNA FALLA ENTRE EL "VIVO" Y LA CUBIERTA METÁLICA DEL EQUIPO, P.EJ. LAVADORA, SE TENDRÍA QUE UN INTERRUPTOR PODRÍA RESPONDER A LA CORRIENTE QUE FLUYE DE LA CONEXIÓN A TIERRA Y CORTAR LA ENERGÍA DEL CIRCUITO.

UN INTERRUPTOR DIFERENCIAL INTERROMPE EL CIRCUITO SI DETECTA UNA DERIVACIÓN POR EL CABLE A TIERRA, NO PROTEGE DE DESCARGAS RECIBIDAS ENTRE DOS CABLES.

EL EFECTO DE UNA DESCARGA DEPENDE DE LA CORRIENTE QUE PASA Y DE LA PARTE DEL CUERPO ATRAVESADA: EL RIESGO ES ALTO SI LA CORRIENTE ATRAVIESA O PASA CERCA DEL CORAZÓN.

SON MUY PELIGROSAS LAS DESCARGAS RECIBIDAS POR LAS DOS MANOS O ENTRE LA MANO IZQUIERDA Y LA TIERRA, ESPECIALMENTE CON LOS PIES MOJADOS.

FORMA DE ONDA Y SU NOTACIÓN

LA DESCRIPCIÓN COMPLETA DE UNA FUENTE DE VOLTAJE V_S O DE UNA FUENTE DE CORRIENTE i_S REQUIERE LA ESPECIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN COMPLETA EN EL TIEMPO.

EJ) LA FORMA DE ONDA $V_S(\cdot)$ DONDE

1) $V_S(t) = K \quad \forall t \text{ CONSTANTE}$

2) $V_S(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ SINUSOIDE

A: AMPLITUD

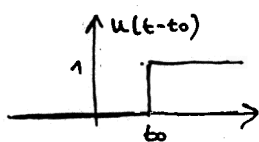
ω : FRECUENCIA ANGULAR RAD/S

ϕ : FASE EN RADIANES

3) $V_S(t) = u(t)$ ESCALÓN UNITARIO

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad u(t)$$

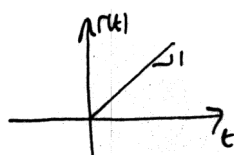
$0, \frac{1}{2}, 1$ $t=0 \Rightarrow$ NO IMPORTA EN ESTE CASO PERO $u(0) = \frac{1}{2}$ ES PREFERIBLE PARA TRANSFORMADA DE FOURIER



RETIENDO EN t_0 SEG

4) $V_S(t) = r(t)$ RAMPA UNITARIA

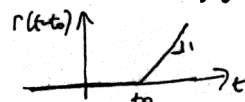
$$r(t) = t u(t) \quad \forall t$$



$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

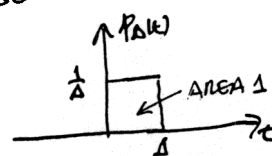
$$\int_{-p}^t u(t') dt' = r(t)$$

PROPUESTO DEMOSTRAR QUE $r(t - t_0) = \int_{-p}^t u(t' - t_0) dt'$



5) $V_S(t) = p_{\Delta}(t)$ PULSO

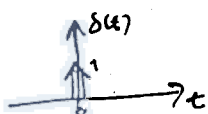
$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \Delta \leq t \end{cases}$$



NOTA $p_{\Delta}(t) = \frac{u(t) - u(t - \Delta)}{\Delta} \quad \forall t$

6) $V_S(t) = \delta(t)$ IMPULSO UNITARIO (FUNCIÓN DELTA DE DIRAC)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{SINGULAR} & t = 0 \end{cases}$$



LA SINGULARIDAD ES TAL QUE PARA CUALQUIER $f \geq 0$

$$\int_{-f}^f \delta(t) dt = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

IMPULSO ES PULSO DE AMPLITUD INFINITA PARA UN TIEMPO INFINITESIMAL CUYA AREA ES FINITA

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t)$$

PROPIEDAD: SI f ES FUNCIÓN CONTINUA

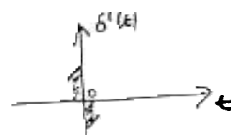
$$\int_{-f}^f f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad \forall f \geq 0$$

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt} \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

RELACIÓN ENTRE ESCALÓN UNITARIO E IMPULSO UNITARIO

7) $V_S(t) = \delta'(t)$ DOBLETE UNITARIO

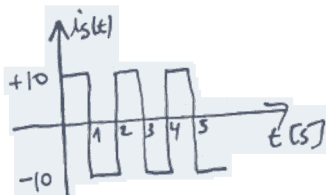
$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{SINGULAR} & t = 0 \end{cases}$$



LA SINGULARIDAD ES TAL QUE

$$\delta(t) = \int_{-p}^t \delta'(t') dt' \quad , \quad \frac{d \delta(t)}{dt} = \delta'(t)$$

EJEMPLO: REPRESENTAR LA ONDA RECTANGULAR DE LA FIGURA USANDO ESCALONES UNITARIOS



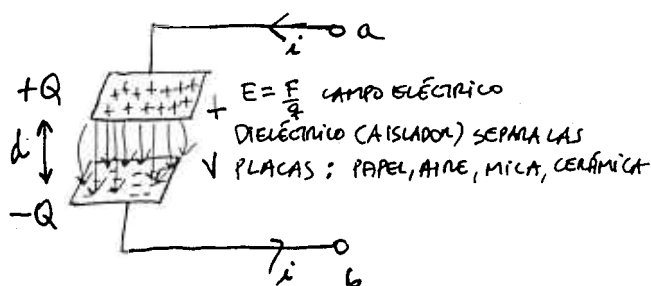
$$i_S(t) = 10u(t) - 20u(t-1) + 20u(t-2) - 20u(t-3) + \dots$$

ELEMENTOS CAPACITIVOS

FENÓMENO FÍSICO:

LA PRESENCIA DE CARGAS EN DOS SUSTANCIAS (CONDUCTORES) ESPACIALMENTE SEPARADAS CAUSA UNA FUERZA ELÉCTRICA ENTRE AMBAS SUSTANCIAS.

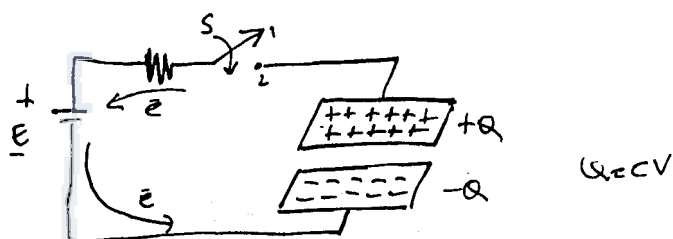
EJ. CONDENSADOR DE PLACAS METÁLICAS PARALELAS



SUPOSICIONES:

- 1) PLACAS Y ALAMBRES SON CONDUCTORES PERFECTOS
- 2) LA AISLACIÓN ENTRE PLACAS ES PERFECTA DE MODO QUE NO FLUYEN CARGAS DE UNA PLACA A LA OTRA
- 3) SIEMPRE HAY UN NÚMERO IGUAL Y OPUESTO DE CARGAS EN AMBAS PLACAS. TODAS LAS LÍNEAS DE CAMPO QUE DEJAN UNA PLACA TERMINAN EN LA OTRA.
- 4) NO HAY CAMPOS MAGNÉTICOS CERCANOS AL CAPACITOR

CARGA DE UN CONDENSADOR



- 1.- AL CERRAR PLACAS NEUTRAS
- 2.- AL CERRAR EL INTERRUPTOR S, LOS ELECTRONES DEL PLATO SUPERIOR SON ATRAIDOS POR EL TERMINAL + DE LA FUENTE. EL MISMO NÚMERO DE ELECTRONES ES REPELIDO POR EL TERMINAL - DE LA FUENTE Y SE ACUMULA EN EL PLATO INFERIOR.

EVENTUALMENTE SE ESTABLECE UN EQUILIBRIO ENTRE LA ENERGÍA POTENCIAL QUE DA LA FUENTE Y LAS FUERZAS DE ATRACCIÓN Y REPULSIÓN EN LAS PLACAS.

UNA VEZ QUE EL CONDENSADOR HA ALCANZADO EL POTENCIAL E, EL PROCESO SE DETIENE Y PERMANECE CARGADO (SI NO HAY PERDIDAS). EN EQUILIBRIO LA CORRIENTE ES NULA PORQUE NO HAY DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE EL CONDENSADOR Y LA BATERÍA.

EN ESAS CONDICIONES SE TIENE QUE

$$Q = C V$$

DONDE C ES LA CAPACITANCIA

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \quad \text{FARAD} = \text{COULOMB/VOLT}$$

A: ÁREA DE PLACA EN m^2

d: SEPARACIÓN ENTRE PLACAS EN M.

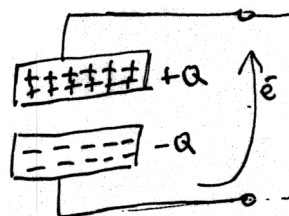
ϵ_0 : CONSTANTE DIELECTRICA EN ESPACIO VACIO F/M

ϵ_r : PERMITIVIDAD RELATIVA

1.0	VACUO
1.0006	AIRE
5.0	MICA
6.0	PORCELANA
7500	TITANATO DE BARIO

LA CONSTANTE DIELECTRICA INDICA LA FACILIDAD CON QUE UN MATERIAL AISLANTE PUEDE ESTABLECER UN CAMPO ELÉCTRICO.

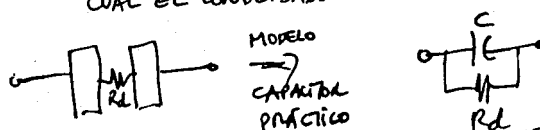
DESCARGA DE UN CONDENSADOR



EL EXCESO DE e DE LA PLACA INFERIOR FLUYERÁ A LA SUPERIOR. CUANDO EXISTE UN NÚMERO IGUAL DE e A AMBOS LADOS, EL CAPACITOR SE DICE DESCARGADO. $Q = C V = 0$

NOTA 1. LAS CORRIENTES DE CARGA Y DESCARGA FLUYEN EN DIRECCIONES OPUESTAS.

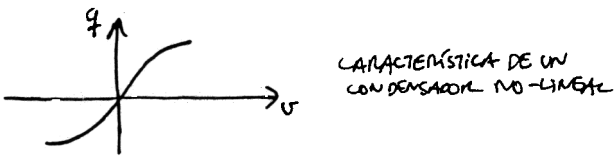
NOTA 2. IDEALMENTE EL MATERIAL DIELECTRICO AISLANTE SE COMPORTA COMO UN CIRCUITO ABIERTO ($R \rightarrow \infty \rightarrow i = 0$). EN LA PRÁCTICA SE TIENE UNA RESISTENCIA DE FUGA $R_d \approx 1000 M\Omega$ FINITA, POR LA CUAL EL CONDENSADOR SE DESCARGA.



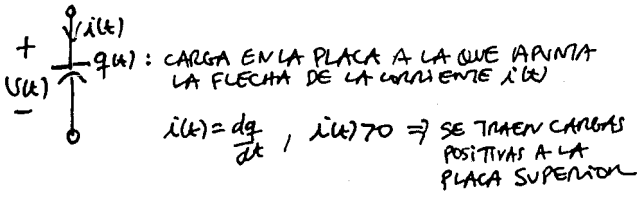
NOTA 3. DIELECTRICO TIENE UN VOLTAJE DE ORIGEN, MÁS ALTA DEL CUAL SALTAN CHISPAS O ARCOS ENTRE PLACAS. SE PUEDE DESTRUIR EL CAPACITOR.

ELEMENTOS CAPACITIVOS IDEALES

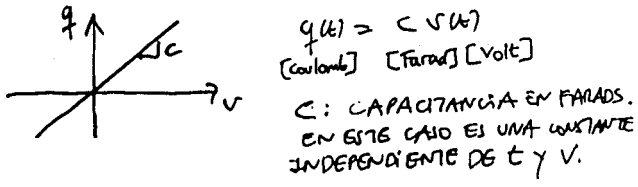
ELEMENTOS DE 2-TERMINALES EN LOS QUE PARA CUALQUIER INSTANTE t LA CARGA ALMACENADA $q(t)$ Y SU VOLTAJE $v(t)$ SATISFACEN UNA RELACIÓN DEFINIDA POR UNA CURVA EN EL PLANO $v-q$.



Simbología



CONDENSADOR LINEAL-INVARIANTE



LA RELACIÓN ENTRE LA CORRIENTE Y EL VOLTAJE DE RAMA ES:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

INTEGRANDO $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t (\cdot) dz$ SE OBTIENE QUE

$$v(t) = \int_{-\infty}^t i(z) dz = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(z) dz}_{v(0)} + \frac{1}{C} \int_0^t i(z) dz$$

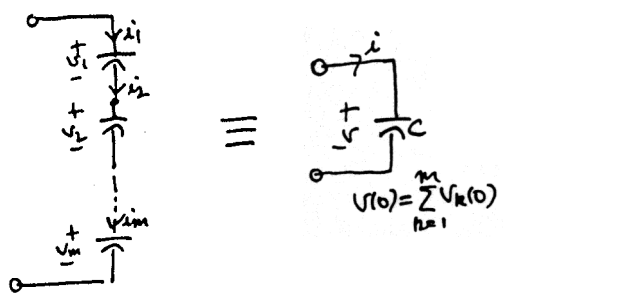
LA CONDICIÓN INICIAL $v(0)$ RESUME EL EFECTO DE $i(z)$ DESDE $z = -\infty$ A $z = 0$.
SE DICE QUE LOS CONDENSADORES TIENEN MEMORIA YA QUE SU VOLTAJE $v(t)$ DEPENDE DEL VALOR INICIAL $v(0)$ Y DE TODOS LOS VALORES DE LA CORRIENTE ENTRE 0 Y t .

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(z) dz$$

$S = \frac{1}{C}$ ELASTANCIA EN DARAFS.

CONEXIÓN SERIE Y PARALELA DE ELEMENTOS CAPACITIVOS

CONEXIÓN SERIE

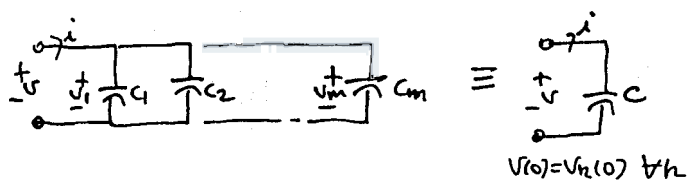


LCK $i_k(t) = i(t) \quad \forall k$
$$v(t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) = \sum_{k=1}^m \left(v_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(t') dt' \right)$$

EN $t=0$, $v(0) = \sum_{k=1}^m v_k(0)$
$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

DONDE $\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k}$

2. CONEXIÓN PARALELA



LCK $i = \sum_{k=1}^m i_k = \sum_{k=1}^m C_k \frac{dv}{dt} = C \frac{dv}{dt}$
DONDE $C = \sum_{k=1}^m C_k$

SUPONIENDO QUE LOS CONDENSADORES TIENEN LOS MISMOS VOLTAJES INICIALES, O SINO SE VOLTA LCK.

EJEMPLO PARA LA RED DE LA FIGURA 1, DETERMINAR EL VOLTAJE $v_k(t)$ $\forall t$ SI LA FORMA DE ONDA DE LA CORRIENTE ESTÁ DADA POR LA FIG. 2

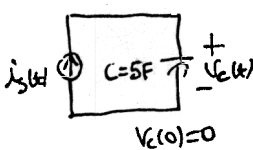


FIG. 1

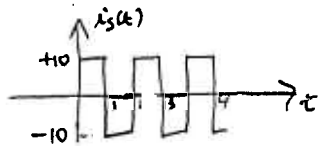


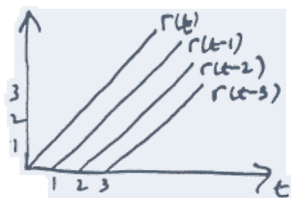
FIG. 2

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t') dt' \quad t \geq 0$$

$$\frac{1}{5} \int_0^t [10u(t) - 20u(t-1) + 20u(t-2) - 20u(t-3) + \dots] dt'$$

$$2r(t) - 4r(t-1) + 4r(t-2) - 4r(t-3) + \dots$$

NOTAR QUE



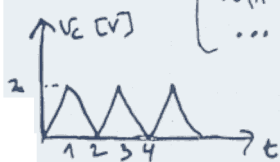
$$r(t) = 1 + r(t-1) \quad t \geq 1$$

$$r(t-1) = 1 + r(t-2) \quad t \geq 2$$

$$r(t-2) = 1 + r(t-3) \quad t \geq 3$$

LUEGO,

$$V_c(t) = \begin{cases} 2r(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 2(1-r(t-1)) & 1 \leq t \leq 2 \\ 2r(t-2) & 2 \leq t \leq 3 \\ 2(1-r(t-3)) & 3 \leq t \leq 4 \\ \dots & \end{cases}$$



HAY UN FENÓMENO DE SUAVIZADO.

PROPIEDAD DE CONTINUIDAD

SI LA FORMA DE ONDA $i_c(\cdot)$ EN UN CAPACITOR LINEAL-INVARIANTE ESTA ACOTADA EN EL INTERVALO CERRADO $[t_a, t_b]$, ENTONCES LA FORMA DE ONDA DEL VOLTAJE $V_c(\cdot)$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN EL INTERVALO ABIERTO (t_a, t_b) .

EN PARTICULAR

$$V_c(T^-) = V_c(T^+) \quad \forall T, t_a < T < t_b$$

DEMO: YA QUE $i_c(\cdot)$ ES ACOTADA EN $[t_a, t_b]$,

$$\exists M / |i_c(t)| < M \quad \forall t \in [t_a, t_b]$$

LUEGO,

$$V_c(T+dt) - V_c(T) = \frac{1}{C} \int_T^{T+dt} i_c(t') dt' \leq \frac{M}{C} dt$$

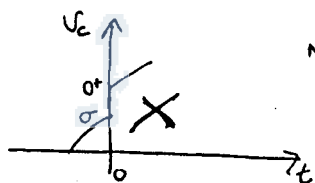
$$t_a \leq T \leq t_b$$

$$t_a \leq T+dt \leq t_b$$

$$\frac{M}{C} dt \rightarrow 0 \quad \text{WANDO } dt \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow V_c(T+dt) \rightarrow V_c(T) \quad \text{WANDO } dt \rightarrow 0$$

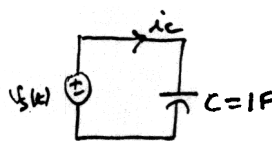
$\therefore$ LA FORMA DE ONDA $V_c(\cdot)$ ES CONTINUA EN $t=T$.



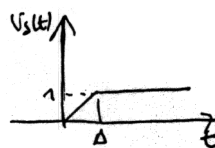
NO PUEDE OCURRIR UN SALTO INSTANTANEO EN EL VOLTAJE DEL CAPACITOR, SALVO QUE LA CORRIENTE SEA ∞ .

$$\text{DEBE CUMPLIRSE QUE } V_c(0^-) = V_c(0^+)$$

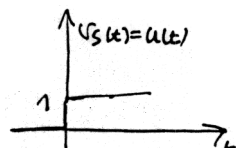
CIRCUITO PARA GENERAR UN IMPULSO DE CORRIENTE (EN TEORÍA)



SI LA CORRIENTE POR EL CAPACITOR NO ESTA ACOTADA ENTONCES LA PROPIEDAD DE CONTINUIDAD DEL VOLTAJE NO SE SATISFACE.



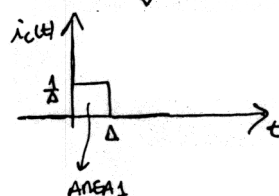
$$\Delta \rightarrow 0$$



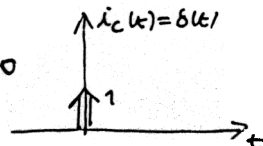
$$i_c(t) = C \frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_s}{dt} = p_{\Delta}(t)$$

$$i_c = \frac{dv_s}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = \delta(t)$$

$$i_c = \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t)$$

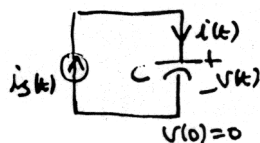


$$\Delta \rightarrow 0$$



LA CAPACITANCIA SE PUEDE INTERPRETAR COMO LA PROPIEDAD DE UN CIRCUITO ELECTRICO DE OPONERSE AL CAMBIO DE VOLTAJE ENTRE SUS TERMINALES.

EJEMPLO:



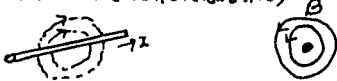
$$V(0) = 0$$

$$a) i_s(t) = u(t) \quad V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t u(t') dt' = \frac{1}{C} r(t)$$

$$b) i_s(t) = \delta(t) \quad V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \delta(t') dt' = \frac{1}{C} u(t)$$

ELEMENTOS INDUCTIVOS

FENÓMENO FÍSICO: UNA CORRIENTE POR UN CONDUCTOR PRODUCE UNA FUERZA A DISTANCIA (CAMPO MAGNÉTICO)



LÍNEAS DE FLUJO MAGNÉTICO SON CONCÉNTRICAS Y SIGUEN REGLA DE LA MANO DERECHA

PARA REFORZAR EL CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO SE PUEDE HACER UN ENROLLADO DE MUCHAS VUELTAS EN LA FORMA DE UNA BOBINA

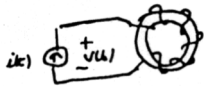


EN UNA ESPIRA SE REFORZA EL FLUJO CONCENTRÁNDOLO EN UN ÁREA PEQUEÑA.



FUERA DEL SOLENOIDE LOS CAMPOS SE CANCELAN Y DENTRO SE REFORZAN
SOLENOIDE: ALAMBRO LARGO ENROLLADO EN UNA HÉLICE APRETADA Y QUE LLEVA UNA CORRIENTE I

EJEMPLO: TOROIDE DE MATERIAL NO FERROMAGNÉTICO



SUPOSICIONES:

- EL CAMPO MAGNÉTICO FUERA DE LA BOBINA ES DESPREZIGABLE
- SE DESPREZIA TAMBIÉN LA RESISTENCIA ELÉCTRICA ASOCIADA AL ALAMBRO
- SE DESPREZIAN TAMBIÉN LAS CAPACIDADES PARASITARIAS QUE SE FORMAN ENTRE ESPIRAS CONTIGUAS (CONDUCTORES SEPARADOS POR ESPALTE O BARNIZ AISLANTE QUE ACTUA COMO DIELECTRICO)

ENTONCES:

$$\phi = L i$$

ϕ : FLUJO MAGNÉTICO MEDIDO EN WEBERS

L : PARÁMETRO INDUCTANCIAS SE MIDE EN HENRY (H)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad [H] \quad \text{Volt seg / Amp}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb / A} \cdot \text{m}$ constante de permeabilidad del espacio vacío.

SI EL MATERIAL ES FERROMAGNÉTICO $\mu = \mu(i)$ ES NO-LINEAL

N : número de vueltas

A : Área, sección transversal en mts^2

l : Largo efectivo del solenoide

LEY DE FARADAY

UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE INDUCE UN VOLTAJE

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

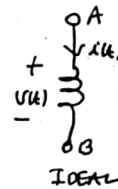
ESTO SE PUEDE DEBER A QUE LA CORRIENTE QUE PRODUCE EL CAMPO CAMBIA EN EL TIEMPO, A QUE SE MUEVE UN MAGNETO CON RESPECTO A UN CONDUCTOR, O A QUE SE MUEVE UNA BOBINA

ELEMENTO INDUCTIVO IDEAL

ELEMENTO DE 2-TERMINALES, EN EL QUE PARA CUALQUIER TIEMPO t , SU FLUJO $\phi(t)$ Y SU CORRIENTE $i(t)$ SATISFACEN UNA RELACIÓN DEFINIDA POR UNA CURVA EN EL PLANO $i-\phi$



SIMBOLOGÍA:



ELEMENTOS INDUCTIVOS LINEALES INVARIANTES

$$\phi(t) = L i(t)$$

L constante que se llama INDUCTANCIAS se mide en HENRY [OHM · SEG]

POR LA LEY DE FARADAY SE INDUCE UN VOLTAJE

$$v = \frac{d\phi}{dt}$$

LUEGO,

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

LAS INDUCTANCIAS TIENEN "MEMORIA". EL VALOR DE $i(t)$ DEPENDE DEL VALOR INICIAL $i(0)$ Y DE TODOS LOS VALORES DE LA FORMA DE ONDA DEL VOLTAJE $v(t')$ EN $[0, t]$.

PROPIEDAD DE CONTINUIDAD

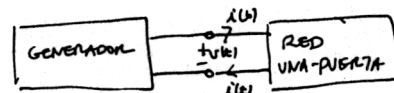
SI $|v(t)| \leq M$ ACOTADO $\forall t \in [0, t_f]$

ENTONCES LA CORRIENTE $i(t)$ EN UNA INDUCTANCIAS LINEAL INVARIANTES ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN EL INTERVALO ABERTO $(0, t_f)$.

LA CORRIENTE EN UNA INDUCTANCIAS NO PUEDE SALTAR INSTANTÁNEAMENTE DE UN VALOR A OTRO SI EL VOLTAJE ES ACOTADO.

"LA INDUCTANCIAS SE OPONE AL CAMBIO DE LA CORRIENTE"

POTENCIA Y ENERGÍA



$$p(t) = v(t) i(t) \quad [W]$$

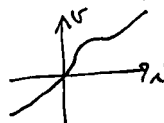
POTENCIA INSTANTÁNEA ABSORBIDA POR EL UNA-FUERZA (ENTREGADA POR EL GENERADOR)

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} v(t') i(t') dt'$$

ENERGÍA ENTREGADA POR EL GENERADOR DE t_1 A t_2

PASIVIDAD

UN ELEMENTO RESISTIVO SE DICE PASIVO SI $\forall t$ SU CARACTERÍSTICA ESTÁ EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTES, INCLUYENDO LOS EJES $i-v$.



$$p(t) \geq 0 \quad \forall t$$

INDEPENDIENTE DE LA FORMA DE ONDA DE LA CORRIENTE POR LA RESISTENCIA NUNCA ENTREGA POTENCIA AL MUNDO EXTERIOR.

ACTIVA: SI NO ES PASIVA. UNA RESISTENCIA LINEAL ES ACTIVA SI Y SOLO SI $R(t) > 0$ PARA ALGUN t .

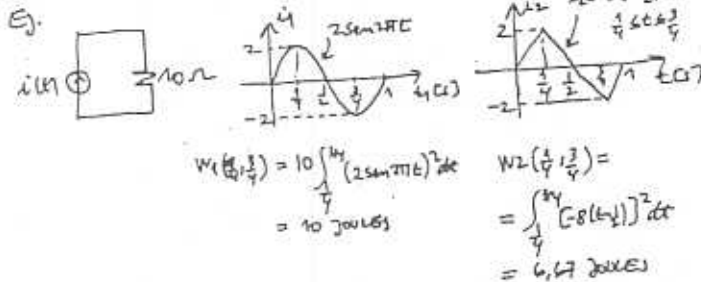
ELEMENTOS RESISTIVOS

LA ENERGÍA QUE OYMA AL ELEMENTO DE 2-TERMINALES DURANTE $[t_1, t_2]$ DEPENDE DE LA FORMA DE ONDA COMPLETA $v(t)$ O $i(t)$ EN EL INTERVALO $[t_1, t_2]$.

$$P_R(t) = R i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$$W_R[t_1, t_2] = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) dt$$

$R > 0 \Rightarrow W_R > 0$ VE LA ENERGÍA SE DISIPA EN FORMA DE CALOR.



$W_1 \neq W_2$ A PESAR DE QUE

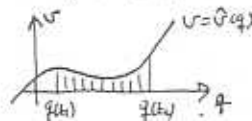
$$i_1(t) = i_2(t) = 2A$$

$$v_1(t) = v_2(t) = 20V$$

ELEMENTOS CAPACITIVOS

$$v = \hat{v}(q)$$

CAPACITOR CONTROLADO POR CARGA, INVARIANTE



$$W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(q) \frac{dq}{dt} dt = \int_{q_1}^{q_2} v(q) dq$$

LA ENERGÍA ENTREGADA AL CAPACITOR ENTRE t_1 Y t_2 ES INDEPENDIENTE DE LA FORMA DE ONDA DE $v(t)$ O $i(t)$.

PARA UN CAPACITOR LINEAL

$$v(q) = q/C$$

$$W_C(q_1, q_2) = \int_{q_1}^{q_2} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} [q_2^2 - q_1^2] = \frac{1}{2} C [v_2^2 - v_1^2]$$

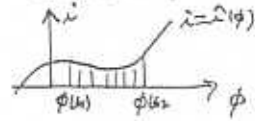
VISTO DE OTRA FORMA

$$W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot i dt = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot C \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} C [v_2^2 - v_1^2] \text{ Joulles}$$

ELEMENTOS INDUCTIVOS

$$i = \hat{i}(\phi)$$

INDUCTOR CONTROLADO POR FLUJO, INVARIANTE.



$$W_L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} i(\phi) \frac{d\phi}{dt} dt = \int_{\phi_1}^{\phi_2} i(\phi) d\phi$$

PARA CUALQUIER PAR DE FORMAS DE ONDA $[i(t), \phi(t)]$ TOMANDO LAS VALORES $[i(t_1), \phi(t_1)]$ EN t_1 Y $[i(t_2), \phi(t_2)]$ EN t_2 DA EL MISMO VALOR $W_L(t_1, t_2)$.

PARA UN INDUCTOR LINEAL

$$i(\phi) = \phi/L$$

$$W_L(\phi_1, \phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\phi}{L} d\phi = \frac{1}{2L} [\phi_2^2 - \phi_1^2] = \frac{1}{2} L [i_2^2 - i_1^2]$$

VISTO DE OTRA FORMA

$$W_L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot i dt = \int_{t_1}^{t_2} L \frac{di}{dt} \cdot i dt = L \int_{i_1}^{i_2} i di = \frac{1}{2} L [i_2^2 - i_1^2] \text{ Joulles}$$

ELEMENTOS CAPACITIVOS

a) Si $q_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$

$$W_C(0, t) = \frac{1}{2C} q^2(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

CAPACITOR ABSORBE ENERGÍA, SE ALMACENA EN SU CAMPO ELÉCTRICO.

b) Si $q_1 = Q = C V$ CARGA INICIAL $v_1 = V$ en t_1

$$W_C(t_1, t_2) = \frac{1}{2C} [q^2(t_2) - Q^2] = \frac{1}{2} C [v(t_2)^2 - V^2]$$

LA ENERGÍA ABSORBIDA POR EL CAPACITOR SIEMPRE ES NEGATIVA SI $q(t_2) < Q$ O $v(t_2) < V$.

Si $q(t_2) = 0 = v(t_2)$

$$W_C(t_1, t_2) = -\frac{1}{2} C V^2$$

LA ENERGÍA ES DEVUELTA AL CIRCUITO.

CAPACITOR PASIVO:

SI LA CARACTERÍSTICA $v-q$ PASA POR EL ORIGEN Y ESTÁ EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTE.

LA ENERGÍA ALMACENADA ES NO NEGATIVA SIEMPRE $W_C = \frac{1}{2C} q^2(t)$ (C/O CASO UNIL-INVARIANTE)

SI UN ELEMENTO ES PASIVO LA TRANSFERENCIA NETA DE ENERGÍA ES ≥ 0 .

ELEMENTOS INDUCTIVOS

a) Si $\phi_1 = 0 \Rightarrow i_1 = 0$

$$W_L(0, t) = \frac{1}{2L} \phi^2(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

INDUCTOR ABSORBE ENERGÍA, SE ALMACENA EN SU CAMPO MAGNÉTICO.

b) $\phi_1 = \Phi = L I$

$i_1 = I$ en t_1

$$W_L(t_1, t_2) = \frac{1}{2L} [\phi^2(t_2) - \Phi^2] = \frac{1}{2} L [i(t_2)^2 - I^2]$$

LA ENERGÍA ABSORBIDA POR EL INDUCTOR SIEMPRE ES NEGATIVA SI $\phi(t_2) < \Phi$ O $i(t_2) < I$

Si $\phi(t_2) = 0 = i(t_2)$

$$W_L(t_1, t_2) = -\frac{1}{2} L I^2$$

LA ENERGÍA ES DEVUELTA AL CIRCUITO.

INDUCTANCIA PASIVA:

SI LA CARACTERÍSTICA $\phi-i$ PASA POR EL ORIGEN Y ESTÁ EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTE.

LA ENERGÍA ALMACENADA ES SIEMPRE NO-NEGATIVA $W_L = \frac{1}{2L} \phi^2(t)$ (C/O CASO UNIL-INVARIANTE)

SI UN ELEMENTO ES PASIVO LA TRANSFERENCIA NETA DE ENERGÍA ES ≥ 0 .

ELEMENTOS CAPACITIVOS

Si $v(t)$ y $q(t)$ SON PERIÓDICOS DE PERÍODO $T = t_2 - t_1$,

$$q(t_2) = q(t_1 + T) = q(t_1)$$

$$\Rightarrow W_C(t_1, t_2) = 0$$

BAJO ESTIMULACIÓN PERIÓDICA LA ENERGÍA TOTAL QUE INGRESA A UN CAPACITOR CONTROLADO POR CARGA SOBRE CUALQUIER PERÍODO ES NULA.

LA POTENCIA ENTREGADA AL CAPACITOR NO SE DISIPA, ES UN ELEMENTO SIN PÉRDIDA.

LA ENERGÍA SE ACUMULA DURANTE UNA PARTE DEL CICLO Y SE DEVUELVE AL CIRCUITO DURANTE LA OTRA MITAD.

ELEMENTOS INDUCTIVOS

Si $i(t)$ y $\phi(t)$ SON PERIÓDICOS DE PERÍODO $T = t_2 - t_1$,

$$\phi(t_2) = \phi(t_1 + T) = \phi(t_1)$$

$$\Rightarrow W_L(t_1, t_2) = 0$$

BAJO ESTIMULACIÓN PERIÓDICA LA ENERGÍA TOTAL QUE INGRESA A UN INDUCTOR CONTROLADO POR FLUJO ES CERO SOBRE CUALQUIER PERÍODO.

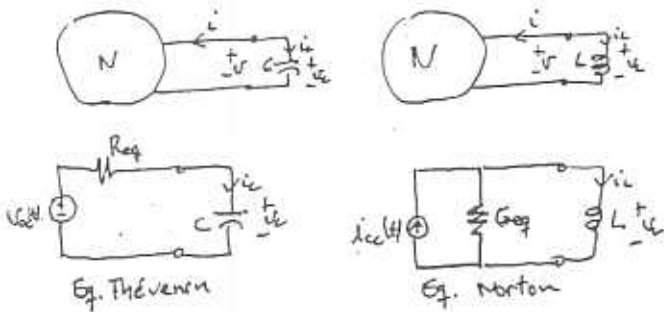
LA POTENCIA ENTREGADA AL INDUCTOR NO SE DISIPA, ES UN ELEMENTO SIN PÉRDIDA.

100M

CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

CIRCUITOS COMPUESTOS POR FUENTES INDEPENDIENTES, ELEMENTOS RESISTIVOS Y UN ELEMENTO CAPACITIVO O INDUCTIVO.

SEA N CIRCUITO RESISTIVO LINEAL-INVARIANTE



DEFINICIONES:

CIRCUITO LINEAL: CADA ELEMENTO ES LINEAL O UNA FUENTE INDEPENDIENTE

CIRCUITO INVARIANTE: CADA ELEMENTO ES INVARIANTE O UNA FUENTE INDEPENDIENTE.

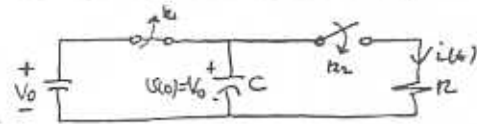
RESPUESTA: CONDUCTA DE UNA VARIABLE DE CIRCUITO: VOLTAGE DE RAMA, CORRIENTE DE RAMA, O UNA COMBINACIÓN LINEAL DE ESTAS.

ENTRADA: FUENTES INDEPENDIENTES

ENTRADA-CERO: SI NO HAY ENTRADAS LA RESPUESTA DEPENDE DE LAS CONDICIONES INICIALES Y DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL CIRCUITO.

ESTADO-CERO: SI NO HAY CONDICIONES INICIALES LA RESPUESTA DEPENDE EXCLUSIVAMENTE DE LA ENTRADA Y DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL CIRCUITO.

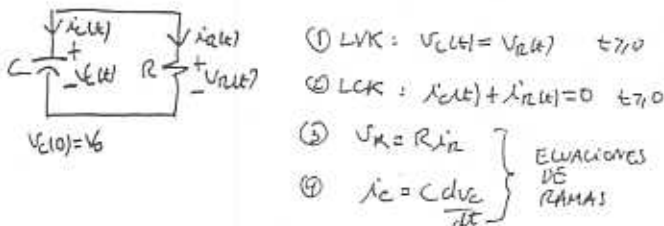
RESPUESTA DE ENTRADA-CERO DE UN CIRCUITO DE PRIMER ORDEN LINEAL E INVARIANTE



- EL CAPACITOR C SE CARGA A POTENCIAL V_0 (R_1 CERRADO, R_2 ABIERTO POR LARGO TIEMPO)
- EN $t=0$ SE ABRE R_1 Y SE CIERRA R_2 SIMULTÁNEAMENTE

DEBIDO A LA CARGA $Q_0 = CV_0$ EN EL CAPACITOR, CIRCULARÁ UNA CORRIENTE $i(t)$ EN LA DIRECCIÓN INDICADA. LA CARGA A TRAVÉS DEL CAPACITOR DISMINUIRÁ GRADUALMENTE Y EVENTUALMENTE SE HARÁ CERO. LA ENERGÍA ELÉCTRICA ALMACENADA EN EL CAPACITOR SE DISIPA COMO CALOR EN LA RESISTENCIA.

ANALÍTICAMENTE:



$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C = -i_R = -\frac{v_R}{R} = -\frac{v_C}{R}$$

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0 \quad t \geq 0 \quad \text{con } v_C(0) = V_0 \quad (1)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN, LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

SOLUCIÓN ES EXPONENCIAL $v_C(t) = K e^{\lambda_0 t}$ POR SUSTITUCIÓN DIRECTA EN (1)

$$C K \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \frac{K}{R} e^{\lambda_0 t} = K e^{\lambda_0 t} \left(C \lambda_0 + \frac{1}{R} \right) = 0$$

$$C \lambda_0 + \frac{1}{R} = 0 \quad \text{ECUACIÓN CARACTERÍSTICA}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = -\frac{1}{RC}$$

K ES UNA CONSTANTE QUE SE DETERMINA DE LA CONDICIÓN INICIAL

$$v_C(0) = K = V_0$$

$$\therefore v_C(t) = V_0 e^{-(1/RC)t} \quad t \geq 0$$

EN UN CIRCUITO DE PRIMER ORDEN, TODAS LAS DEMÁS FORMAS DE ONDA SON EXPONENCIALES

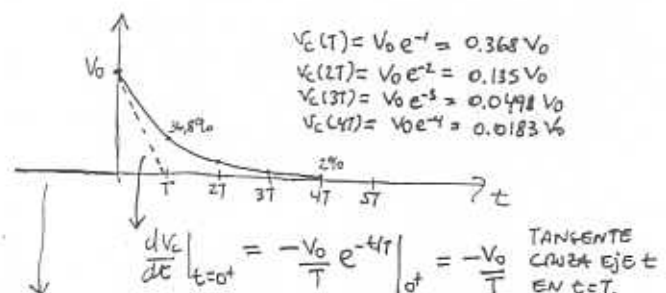
$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = -\frac{V_0}{R} e^{-(1/RC)t} \quad t \geq 0$$

$$i_R = -i_C; \quad v_R = v_C.$$

SE DEFINE "CONSTANTE DE TIEMPO"

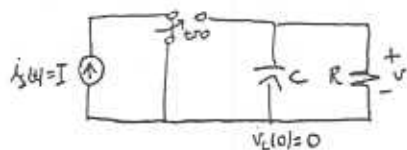
$$T = RC \quad \frac{\text{Volt}}{\text{Amp}} \times \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Coulomb/s}} = \text{Seg.}$$

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/T} \quad t \geq 0$$



COMO SOLO INTERESA LA RESPUESTA PARA $t \geq 0$, SE ADOPTA LA CONVENCIÓN DE QUE LA RESPUESTA DE ENTRADA-CERO Y LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO SON NULAS PARA $t < 0$.

RESPUESTA DE ESTADO CERO



$t < 0$ LA FUENTE DE CORRIENTE PRODUCE UNA CORRIENTE CIRCULANTE EN EL CIRCUITO

$t = 0$ SE ABRE EL INTERRUPTOR Y LA FUENTE DE CORRIENTE QUEDA CONECTADA AL CIRCUITO RC

LVR v ES EL MISMO A TRAVÉS DE LOS ELEMENTOS

LCK $\boxed{C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v = i_s(t) = I \quad t \geq 0, \quad v(0) = 0.} \quad (2)$

RAZONAMIENTO:

EN $t = 0^+$ $v_c(0^+) = 0$ YA QUE EL VOLTAGE EN EL CAPACITOR NO PUEDE SALTAR ABUPTAMENTE A MENOS QUE LA CORRIENTE SEA INFINITAMENTE GRANDE.

$\therefore i_R(0^+) = \frac{v_c(0^+)}{R} = 0$

$i_c(0^+) = I$ INICIALMENTE TODA LA CORRIENTE DE LA FUENTE INGRESA AL CAPACITOR.

DE (2) $\frac{dv}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{I}{C}$ TASA DE AUMENTO DEL VOLTAGE.

AL PASAR EL TIEMPO $v \uparrow \Rightarrow i_R = \frac{v}{R} \uparrow$

LARGO TIEMPO DESPUÉS DE HABER ABIERTO EL INTERRUPTOR EL CAPACITOR ESTÁ COMPLETAMENTE CARGADO Y EL VOLTAGE ES PRÁCTICAMENTE CONSTANTE,

$\frac{dv}{dt} \approx 0 \Rightarrow v \approx RI$

TODA LA CORRIENTE DE LA FUENTE PASA POR LA RESISTENCIA Y EL CAPACITOR SE COMPORTA COMO UN CIRCUITO ABIERTO.

ANALÍTICAMENTE, LA SOLUCIÓN DE (2) ES

$\boxed{C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v = I \quad t \geq 0, \quad v(0) = 0}$

$v = v_h + v_p$
 $\hookrightarrow$ SOLUCIÓN PARTICULAR
 $\hookrightarrow$ SOLUCIÓN EC. DIF. HOMOGÉNEA

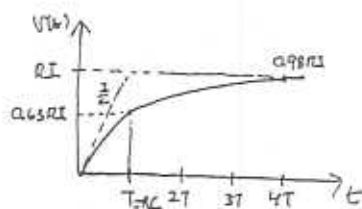
$v_h = k_1 e^{\lambda_0 t}, \quad \lambda_0 = -\frac{1}{RC}$

$v_p = RI$

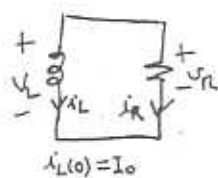
$v(t) = k_1 e^{-(1/RC)t} + RI \quad t \geq 0$

$v(0) = k_1 + RI = 0 \Rightarrow k_1 = -RI$

$\therefore v(t) = RI (1 - e^{-(1/RC)t}) \quad t \geq 0$



CIRCUITO RL : RESPUESTA DE ENTRADA CERO



LCK $i_L + i_R = 0 \Rightarrow i_R = -i_L$

$L \frac{di_L}{dt} + R i_L = 0 \quad t \geq 0$
 $i_L(0) = I_0$

SOLUCIÓN $i_L(t) = I_0 e^{-(R/L)t} \quad t \geq 0$

DONDE $T = \frac{L}{R}$ ES LA CONSTANTE DE TIEMPO

PARA CIRCUITOS LINEALES-INVARIANTES DE PRIMER ORDEN, LA RESPUESTA DE ENTRADA CERO ES UNA FUNCIÓN LINEAL DEL ESTADO INICIAL.

$i_L(0) = h I_0 \Rightarrow i_L(t) = h I_0 e^{-(R/L)t}$ HOMOGÉNEIDAD

$i_L(0) = I_0' + I_0'' \Rightarrow i_L(t) = (I_0' + I_0'') e^{-(R/L)t}$
 $= I_0' e^{-(R/L)t} + I_0'' e^{-(R/L)t}$ ADITIVIDAD

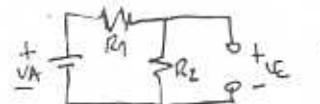
EJEMPLO: SI EL INTERRUPTOR HA ESTADO CERRADO POR UN TIEMPO SUFICIENTEMENTE LARGO Y SE ABRE EN $t=0$, ENCONTRAR $v_c(t), t \geq 0$.



a) SWITCH CERRADO

$v_c = V$ CTE $\Rightarrow i_c = C \frac{dv}{dt} = 0$

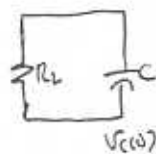
EL CAPACITOR SE COMPORTA COMO UN CIRCUITO ABIERTO



$v_c = v_c(0) = \frac{V_A R_2}{R_1 + R_2}$

PAR DIVISOR DE VOLTAJE

b) SWITCH ABIERTO



$v_c(t) = \frac{V_A R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/RC} \quad t \geq 0$

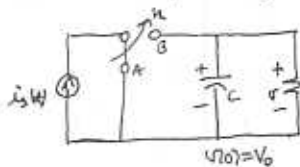
ES UNA RESPUESTA DE ENTRADA CERO

RESPUESTA COMPLETA

PARA CIRCUITOS LINEALES

RESPUESTA COMPLETA = RESPUESTA DE ESTADO-CERO
+ RESPUESTA DE ESTADO-CERO

ESTE ES UN RESULTADO FUNDAMENTAL DE LA TÉCNICA DE
CIRCUITOS LINEALES Y DE LA TEORÍA DE SISTEMAS LINEALES



EL SWITCH SE PASA
DE 'A' A 'B' EN $t=0$.

$$C \frac{du}{dt} + Gu = i_s(t) \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(0) = V_0 \quad (2)$$

RENC, u_1 POR DEFINICIÓN ES LA SOLUCIÓN DE

$$C \frac{du_1}{dt} + Gu_1 = 0 \quad t \geq 0 \quad (3)$$

$$u_1(0) = V_0 \quad (4)$$

RESC, u_2 POR DEFINICIÓN ES LA SOLUCIÓN DE

$$C \frac{du_2}{dt} + Gu_2 = i_s(t) \quad t \geq 0 \quad (5)$$

$$u_2(0) = 0 \quad (6)$$

SUMANDO (3) Y (5), (4) Y (6) SE OBTIENE QUE

$$C \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} + G(u_1 + u_2) = i_s(t) \quad t \geq 0$$

$$u_1(0) + u_2(0) = V_0$$

LA FORMA DE ONDA $u_1(t) + u_2(t)$ SATISFACE LAS ECU. (1) Y (2).

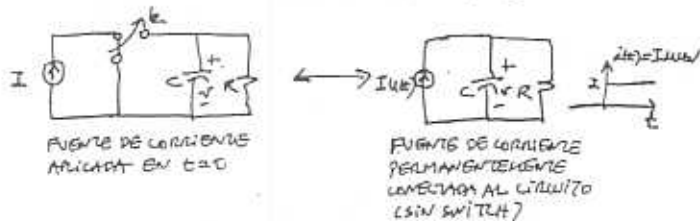
YA QUE LA SOLUCIÓN DE (1) Y (2) ES ÚNICA, SE TIENE QUE LA
RESPUESTA COMPLETA ES

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad t \geq 0$$

$$\text{Si } i_s(t) = I_m e^{st} \quad u(t) = \underbrace{V_0 e^{-(1/RC)t}}_{\text{RENC}} + \underbrace{RI(1 - e^{-(1/RC)t})}_{\text{RESC}} \quad t \geq 0$$

RESPUESTA AL ESCALÓN

UNA DESCRIPCIÓN ALTERNATIVA A LOS ANTERIORES ES APLICAR
UN ESCALÓN DE ENTRADA QUE COMIENZA EN $t=0$.



RESPUESTA AL ESCALÓN $u(t)$ DE UN CIRCUITO:

SE DEFINE COMO LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO A UNA
ENTRADA ESCALÓN UNITARIO $u(t)$.

$$u(0) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \text{POR CONVENCIÓN}$$

PARA EL CIRCUITO RC DE LA FIGURA

$$u(t) = R(1 - e^{-(1/RC)t}) u(t); \quad \text{donde } I = 1$$

YA NO ES NECESARIO INDICAR
QUE LA RESPUESTA ES VÁLIDA
PARA $t \geq 0$.

RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$ DE UN CIRCUITO:

SE DEFINE COMO LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO A UNA
ENTRADA IMPULSO UNITARIO $\delta(t)$.

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \text{POR CONVENCIÓN}$$

PARA EL CIRCUITO RC LINEAL-INVARIANTES

$$h(t) = \frac{d}{dt} [R(1 - e^{-(1/RC)t}) u(t)]$$

SOLO ES VÁLIDA PARA
CIRCUITOS LINEALES-INVARIANTES

ES CERO EN $t=0$, ÚNICO
INSTANTE EN QUE $\delta \neq 0$.

$$\therefore h(t) = \frac{1}{C} e^{-(1/RC)t} u(t)$$

$$\text{NOTA: } \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}; \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

RÉGIMEN TRANSITORIO Y PERMANENTE

$$u(t) = V_0 e^{-(1/RC)t} + RI(1 - e^{-(1/RC)t}) \quad t \geq 0$$

$$= \underbrace{(V_0 - RI) e^{-(1/RC)t}}_{\text{TRANSITORIO}} + \underbrace{RI}_{\text{PERMANENTE}} \quad t \geq 0$$

RÉGIMEN TRANSITORIO: ES DESPRECIABLE PARA t GRANDE.
FÍSICAMENTE EL TRANSITORIO ES RESULTADO DE LAS CONDICIONES
INICIALES Y DE LA APLICACIÓN SÚBITA DE UNA ENTRADA.

RÉGIMEN PERMANENTE: TÉRMINOS DOMINANTES PARA t GRANDE.
EL RÉGIMEN PERMANENTE ES UN RESULTADO DE LA ENTRADA SOLAMENTE
Y TIENE UNA FORMA DE ONDA RELACIONADA A LA DE LA ENTRADA.

ENTRADA	RÉG. PERMANENTE
CONSTANTE	CONSTANTE
SINUSOIDEAL	SINUSOIDEAL



NOTA: EN DETERMINADAS CONDICIONES PODRÍAN EXISTIR
RÉGIMENES TRANSITORIO Y PERMANENTE.

POR EJEMPLO, SI LA RESISTENCIA $R < 0$ Y $C > 0$
ENTONCES EL EXPONENTE DE LA EXPONENCIAL ES
POSITIVO, Y ESTE TÉRMINO CUELGE CON EL TIEMPO, EN
VEZ DE DECAER.

SE DICE QUE EL CIRCUITO ES INESTABLE EN
ESTE CASO

LINEALIDAD E INVARIANZA

PARA CUALQUIER CIRCUITO LINEAL (ELEMENTOS LINEALES
INVARIANTES O VARIANTES EN EL TIEMPO), EXCITADO CON UNA
ÚNICA FUENTE INDEPENDIENTE, SE TIENE QUE:

LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO ES UNA FUNCIÓN LINEAL DE LA
ENTRADA

LO ANTERIOR POR UNIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA EC. DIFERENCIAL
ORDINARIA Y LINEALIDAD.

LA RESPUESTA COMPLETA, EN CAMBIO, EN GENERAL NO ES UNA
FUNCIÓN LINEAL DE LA ENTRADA (POR EFECTO DE LAS CONDICIONES
INICIALES).

SE DEFINE:

OPERADOR RESPUESTA DE ESTADO-CERO $Z_0(s)$

FORMA DE ONDA DE LA RESPUESTA
DE ESTADO CERO DEL CIRCUITO RC A
LA FORMA DE ONDA DE LA ENTRADA $i_s(t)$

CIRCUITO EN ESTADO
CERO EN $t=0$ Y
SE APLICA ENTRADA
EN ESE INSTANTE

PARA EL CIRCUITO RC SEA

$$u_0 \triangleq Z_0(i_0) \quad \text{RESPUESTA DE ESTADO CERO A
ENTRADA NO APLICADA EN } t=0$$

ES DECIR u_0 ES LA SOLUCIÓN DE

$$C \frac{du_0}{dt} + Gu_0 = i_0(t) \quad t \geq 0$$

$$u_0(0) = 0$$

POR CONVENCIÓN $u_0(t) = 0$ PARA $t < 0$

① $\forall i_1(t), i_2(t)$ DEFINIDOS PARA $t \geq 0$ E IGUALMENTE
IGUALES A CERO PARA $t < 0$

$$Z_0(i_1 + i_2) = Z_0(i_1) + Z_0(i_2) \quad \text{ADITIVIDAD}$$

② $\forall \alpha \in \mathbb{R}, i(t)$

$$Z_0(\alpha i) = \alpha Z_0(i) \quad \text{HOMOGENEIDAD}$$

OPERADOR DE DESPLAZAMIENTO $\mathcal{J}_z$

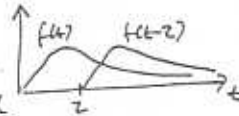
SEA $f(t)$ CUALQUIER FORMA DE ONDA DEFINIDA $\forall t$.

$$(\mathcal{J}_z f)(t) = f(t-z) = f_z(t) \quad \forall t$$

ESTE OPERADOR ES LINEAL

$$\mathcal{J}_z(f+g) = \mathcal{J}_z f + \mathcal{J}_z g \quad \text{Aditividad}$$

$$\mathcal{J}_z(\alpha f) = \alpha \mathcal{J}_z f \quad \text{Homogeneidad}$$



PROPIEDAD DE INVARIANCIA EN EL TIEMPO

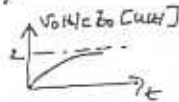
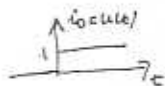
$$\mathcal{J}_z[\mathcal{Z}_0(i_0)] = \mathcal{Z}_0[\mathcal{J}_z i_0] \quad \forall i_0, z \geq 0$$

ESTA PROPIEDAD ES VÁLIDA PARA CUALQUIER CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE. LOS OPERADORES $\mathcal{J}_z$ Y $\mathcal{Z}_0$ CONMUTAN PARA CIRCUITOS LINEALES INVARIANTES.

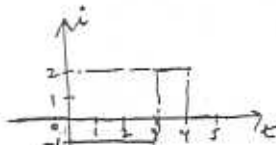
EJEMPLO:

LA RESPUESTA DE ESTADO CERO v_0 DE UN CIRCUITO RC LINEAL INVARIANTE A UN ESCALÓN UNITARIO DE CORRIENTE ES

$$v_0(t) = u(t) 2(1 - e^{-t})$$



ENCONTRAR LA RESPUESTA DE ESTADO CERO v ANTE UNA CORRIENTE CON LA FORMA DE ONDA $i(t)$ SIGUIENTE:



$$i(t) = -u(t) + 3u(t-3) - 2u(t-4)$$

$$i(t) = -u(t) + 3\mathcal{J}_3 u(t) - 2\mathcal{J}_4 u(t)$$

$$v = \mathcal{Z}_0(i) = \mathcal{Z}_0[-u(t) + 3\mathcal{J}_3 u(t) - 2\mathcal{J}_4 u(t)]$$

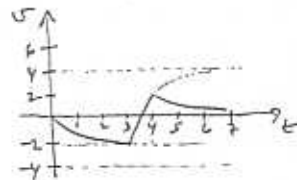
por LINEALIDAD del OPERADOR $\mathcal{Z}_0$ $\uparrow$
$$= -\mathcal{Z}_0[u(t)] + 3\mathcal{Z}_0[\mathcal{J}_3 u(t)] - 2\mathcal{Z}_0[\mathcal{J}_4 u(t)]$$

PROPIEDAD DE INVARIANCIA $\uparrow$
$$= -\mathcal{Z}_0[u(t)] + 3\mathcal{J}_3 \mathcal{Z}_0[u(t)] - 2\mathcal{J}_4 \mathcal{Z}_0[u(t)]$$

$$= -v_0(t) + 3v_0(t-3) - 2v_0(t-4)$$

$$= -u(t)2(1-e^{-t}) + 6u(t-3)(1-e^{-(t-3)})$$

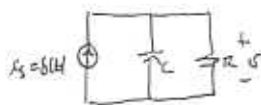
$$- 4u(t-4)(1-e^{-(t-4)})$$



RESPUESTA AL IMPULSO

SEA $h(t)$ RESPUESTA EN TIEMPO t DE UN CIRCUITO DADO QUE

- LA ENTRADA ES UN IMPULSO UNITARIO $\delta(t)$
- ESTÁ EN ESTADO-CERO JUSTO ANTES DE LA APLICACIÓN DEL IMPULSO.



$h(t) = v(t)$ ES LA SOLUCIÓN A

$$C \frac{dv}{dt} + v = \delta(t), \quad v(0^-) = 0.$$

DEBIDO A LA PRESENCIA DEL IMPULSO DEBE DISTINGUIRSE ENTRE $t < 0$ Y $t > 0$.

MÉTODO 1

PARA CIRCUITOS LINEALES INVARIANTES SE TIENE QUE:

$$h(t) = \frac{d\lambda}{dt} \quad \delta \quad \lambda(t) = \int_{-\infty}^t h(u) du$$

$\lambda(t)$: RESPUESTA AL ESCALÓN.

DEM: $h(t) \triangleq Z_0(p_\lambda)$ $p_\lambda(u) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$ $\int_0^\Delta p_\lambda(u) du = 1$

$h(t)$ ES LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO DEL CIRCUITO RC AL PULSO p_λ .

$$p_\lambda = \frac{1}{\Delta} [u(t) - u(t-\Delta)] = \frac{1}{\Delta} u + \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta u$$

$$Z_0(p_\lambda) = Z_0\left(\frac{1}{\Delta} u + \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta u\right) = \frac{1}{\Delta} Z_0(u) + \frac{1}{\Delta} Z_0\left(\int_0^\Delta u\right)$$

$$Z_0(p_\lambda) = \frac{1}{\Delta} Z_0(u) + \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta Z_0(u) \quad \text{POR PROPIEDAD DE INVARIANCIAS}$$

LA DERIVADA DE (1) ES

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \delta(t) y(0^+) e^{-t/\tau} + u(t) y(0^+) \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \\ &= \delta(t) y(0^+) + u(t) y(0^+) \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO (1) Y (2) EN (1) Y BALANCEANDO LA EC DIF. SE OBTIENE

$$\delta(t) y(0^+) - u(t) y(0^+) e^{-t/\tau} + G u(t) y(0^+) e^{-t/\tau} = \delta(t)$$

$$\Rightarrow y(0^+) = \frac{1}{C}$$

$$\therefore h(t) = \frac{1}{C} e^{-t/\tau} u(t)$$

NOTA: LA SOLUCIÓN DE LA EC DIF.

$$C \frac{dv}{dt} + v = \delta(t) \quad \text{CON } v(0^-) = 0 \quad \text{PARA } t > 0 \quad (3)$$

ES IDÉNTICA A LA SOLUCIÓN DE

$$C \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad \text{CON } v(0^+) = \frac{1}{C} \quad \text{PARA } t > 0$$

SE PUEDE INTEGRAR A AMBOS LADOS DE (3) ENTRE $t=0^-$ Y $t=0^+$

$$C \int_{0^-}^{0^+} \frac{dv}{dt} dt + G \int_{0^-}^{0^+} v dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

LA INTEGRAL $\int_{0^-}^{0^+} v dt = 0$ YA QUE $v(t)$ ES FINITO.

SI NO FUERA ASÍ $v(t) = \delta(t)$ Y $\frac{dv}{dt} = \delta'(t)$, LA ECUACIÓN DIFERENCIAL CONTENDRÍA UN TÉRMINO QUE NO SE PODRÍA BALANCEAR.

$\lambda \triangleq Z_0(u)$ RESPUESTA AL ESCALÓN

$$h(t) \triangleq Z_0(p_\lambda) = \frac{1}{\Delta} \lambda - \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \lambda$$

$$h(t) = \frac{\lambda(t) - \lambda(t-\Delta)}{\Delta} \quad \forall t$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h(t) = h(t) = \frac{d\lambda}{dt}$$

PARA EL CIRCUITO RC PARALELO VAMOS QUE LA RESPUESTA AL ESCALÓN ES:

$$\lambda(t) = u(t) R (1 - e^{-(1/RC)t})$$

$$h(t) = \frac{d\lambda}{dt} = \delta(t) R \left(1 - e^{-(1/RC)t}\right) + \frac{1}{C} u(t) e^{-(1/RC)t}$$

$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$

MÉTODO 2.

SOLUCIÓN DIRECTA DE LA EC DIF.

$$C \frac{dv}{dt} + v = \delta(t) \quad \text{CON } v(0^-) = 0 \quad (*)$$

DADO QUE $\delta(t) = 0$ PARA $t > 0$, LA RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$ PARA $t > 0$ ES UNA RESPUESTA DE ESTADO-CERO.

PODEMOS POSTULAR ENTONCES QUE:

$$y(t) = y(0^+) e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

$$\therefore y(t) = u(t) y(0^+) e^{-t/\tau} \quad \forall t \quad (1)$$

SOLO FALTA CALCULAR $y(0^+)$.

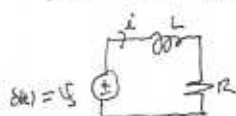
LUGAR

$$C v(0^+) - C v(0^-) = 1$$

ES 0
POR DEFINICIÓN LA RESPUESTA AL IMPULSO ES UNA RESPUESTA DE ESTADO CERO

$$\therefore v(0^+) = \frac{1}{C}$$

EJEMPLO 2 CIRCUITO RL SERIE



$$LVR \quad L \frac{di}{dt} + Ri = \delta(t), \quad i(0^-) = 0$$

APLICANDO $\int_{0^-}^{0^+} (*)$ SE TIENE QUE

$$L i(0^+) - L i(0^-) + R \int_{0^-}^{0^+} i dt = 1$$

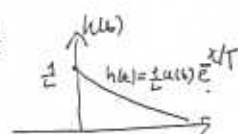
0 POR CONTINUIDAD

$$\therefore i(0^+) = \frac{1}{L}$$

PARA $t > 0$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad i(0^+) = \frac{1}{L}$$

$$h(t) = \frac{1}{L} e^{-(R/L)t} u(t)$$



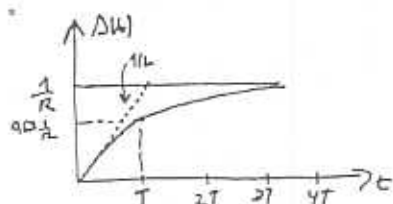
LA RESPUESTA AL ESCALÓN ES:

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} u(t') e^{-(R/L)t'} dt' = \frac{1}{L} \left[\int_0^t e^{-(R/L)t'} dt' \right] u(t)$$

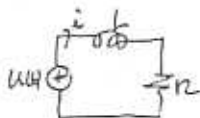
$$\lambda(t) = \frac{1}{L} \left[\left(\frac{L}{R} \right) (1 - e^{-(R/L)t}) \right] u(t)$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{R} u(t) (1 - e^{-(R/L)t})$$

RESPUESTA AL ESCALÓN CUANDO RL SON 0



$$i(t) = \frac{1}{R} u(t) (1 - e^{-(R/L)t})$$



$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t), i(0^-) = 0$$

EN $t=0^+$ $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ YA QUE V_L ES FINITO.

$$\Rightarrow v_R(0^+) = 0, v_L(0^+) = 1 = L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0^+} \Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{1}{L}$$

TODO EL VOLTAJE DE LA FUENTE APARECE EN LA INDUCTANCIA

DESPUÉS DE LARGO TIEMPO LA CORRIENTE ES APROXIMADAMENTE CONSTANTE

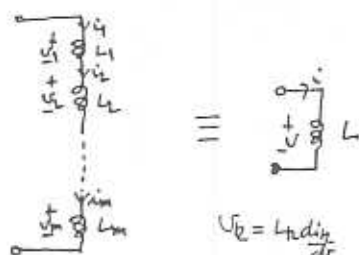
$$\frac{di}{dt} \approx 0 \Rightarrow v_L = L \frac{di}{dt} \approx 0$$

Y TODO EL VOLTAJE DE LA FUENTE CAE EN LA RESISTENCIA

$$i(\infty) = \frac{1}{R}$$

LA INDUCTANCIA SE COMPORTA COMO UN CORTO-CIRCUITO EN EL RÉGIMEN PERMANENTE PARA UN ESCALÓN DE ENTRADA.

CONEXIÓN SERIO DE INDUCTANCIAS



$$V_L = L \frac{di}{dt}, k=1, 2, \dots, m$$

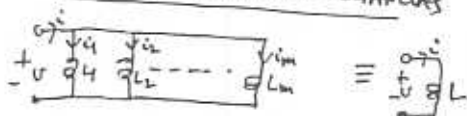
$$LCK \quad i = i_k \quad \forall k$$

$$EN \quad t=0 \quad i(0) = i_k(0) \quad \forall k$$

$$LVK \quad v = \sum_{k=1}^m v_k = \left(\sum_{k=1}^m L_k \right) \frac{di}{dt}$$

$$\therefore L_{eq} = \sum_{k=1}^m L_k \quad v = L_{eq} \frac{di}{dt}, i(0) = i_k(0)$$

CONEXIÓN PARALELA DE INDUCTANCIAS



$$i = \sum_{k=1}^m i_k = \sum_{k=1}^m \left[i_k(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(t') dt' \right]$$

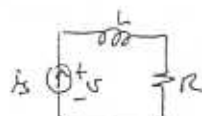
$$POR \quad LVK \quad v = v_k \quad \forall k$$

$$SEA \quad i(0) = \sum_{k=1}^m i_k(0) \quad Y \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{L_k}$$

ENTONCES

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

Ejemplo 3



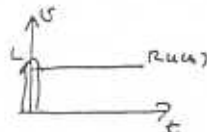
LVK

$$v = Ri + L \frac{di}{dt}, i_L(0^-) = 0$$

RESPUESTA AL ESCALÓN

$$i_s(t) = u(t)$$

$$\Delta(t) = v(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$



RESPUESTA AL IMPULSO

$$i_s(t) = \delta(t)$$

$$v(t) = v(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$



NOTA: LA RESPUESTA AL IMPULSO PUEDE CONTENER IMPULSOS Y DERIVADAS DE IMPULSOS.

Table 4.1 Step and Impulse Responses for Simple Linear Time-Invariant Circuits

i (input)	v (response)	i(t)	v(t)
	$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v = i$		
	$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{L} i = \frac{dv}{dt}$		
	$v = Ri + L \frac{di}{dt}$		
	$v = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$		

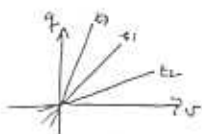
Table 4.1 Step and Impulse Responses for Simple Linear Time-Invariant Circuits (Continued)

v (input)	i (response)	i(t)	v(t)
	$L \frac{di}{dt} + Ri = v$		
	$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = v$		
	$i = C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v$		
	$i = \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$		

ELEMENTO CAPACITIVO LINEAL - VARIANTE

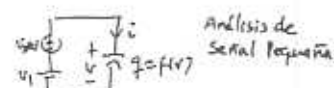
$$q(t) = C(u)(v(t))$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C(u) \frac{dv}{dt} + \frac{dC(u)}{dt} v(t)$$



Ej. CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS: UNA FIJA Y OTRA MÓVIL SE PUEDE CAMBIAR EL ÁREA COMO ENTRE PLACAS O SU DISTANCIA EN FORMA MECÁNICA O MECÁNICA.

ELEMENTO CAPACITIVO NO LINEAL



Análisis de señal pequeña

Aprox Taylor

$$q \approx f(v_1) + \left. \frac{dq}{dv} \right|_{v_1} v_L$$

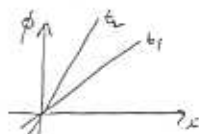
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dt} = C(v_1) \frac{dv_L}{dt}$$

capacitancia lineal instantánea

ELEMENTO INDUCTIVO LINEAL - VARIANTE

$$\phi(t) = L(u) i(t)$$

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} = L(u) \frac{di}{dt} + \frac{dL(u)}{dt} i(t)$$



Ej. EL NÚMERO DE VUELTAS PUEDE CAMBIARSE DESLIZANDO UN CONTACTO MEDIANTE UN MOTOR

ELEMENTO INDUCTIVO NO LINEAL

EN UNA INDUCTANCIA FÍSICA EL FLUJO SE SATURA PARA CORRIENTES GRANDES

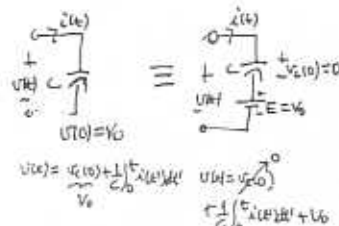
$$\phi = \tanh i$$

$$i = A \cosh \phi$$

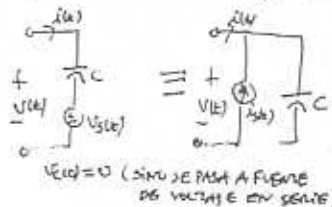
$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} \frac{di}{dt} = \frac{d \tanh i}{dt} \frac{d A \cosh \phi}{dt}$$

$$v(t) = -A \omega \tanh \phi \cosh^2(A \cosh \phi)$$

1 EQUIVALENTE A CAPACITOR CARGADO INICIALMENTE



2 EQUIV. DE THEVENIN Y NORTON

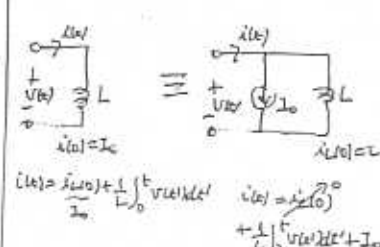


$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t) dt$$

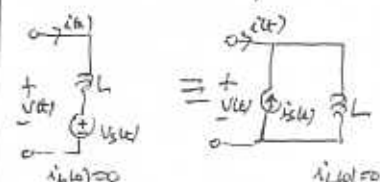
$$i_s(t) = C \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{Si } v_s(t) = u(t) \Rightarrow i_s(t) = C \delta(t)$$

3 EQUIVALENTE A INDUCTOR CON FLUJO INICIAL



4 EQUIV. DE THEVENIN Y NORTON

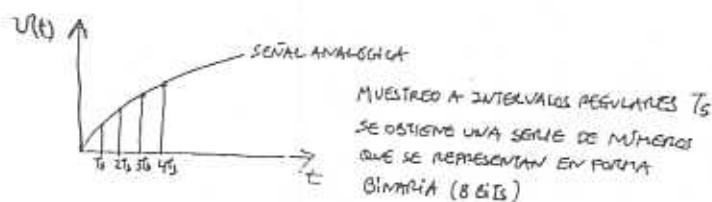


$$v_s(t) = L \frac{di_s}{dt}$$

$$i_s(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_s(t) dt$$

$$\text{Si } v_s(t) = \delta(t) \Rightarrow i_s(t) = \frac{1}{L} u(t)$$

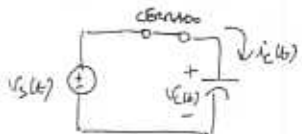
CONVERSOR ANALÓGICO-DIGITAL (CAD)



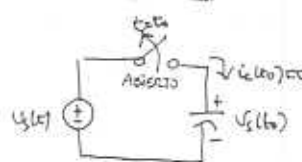
CAD FUNCIONA POR APROXIMACIONES SUCESIVAS, POR LO QUE EMPLEA TIEMPO PARA COMPLETAR UNA CONVERSIÓN Y PREPARARSE PARA LA SIGUIENTE.

SI LA SEÑAL VARÍA DURANTE LA CONVERSIÓN, EL VALOR DE LA SALIDA PUEDE RESULTAR EQUIVOCADO.

CIRCUITO MUESTREO Y L - RETENEDOR



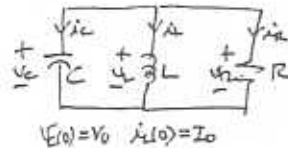
$$v_c(t) = v_s(t)$$



EL VALOR MUESTREO SE MANTIENE ESTABLE DURANTE TODA LA OPERACIÓN DE CONVERSIÓN.

CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN

CIRCUITO RLC PARALELO LINEAL INVARIANTE RESUESTA DE ENTRADA CERO



ECS DE RAMA

$$v_R = R i_R \quad (1) \quad i_R = G v_R$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}, i_L(0) = I_0 \quad (2) \quad i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt$$

$$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt \quad (3) \quad i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}, v_C(0) = V_0$$

$$\text{LVR} \quad v_C = v_R = v_L \quad (4)$$

$$\text{LCK} \quad i_C + i_R + i_L = 0 \quad (5)$$

LAS VARIABLES MÁS CONVENIENTES A RESOLVER SON v_C O i_L .

$$\text{DE (1) Y (5)} \quad C \frac{dv_C}{dt} + G v_C + i_L = 0$$

$$\text{USANDO (2) } i_L = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt + I_0 \quad (6)$$

$$i_L(0) = I_0, \frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

RESOLVIENDO (6) POR $\frac{1}{LC}$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0 \quad \text{EC. DIF. HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES}$$

DONDE

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{rad/s}] \quad \text{FRECUENCIA DE RESONANCIA}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0, \text{ con } f_0 \text{ en HERTZ}$$

ESTOS 2 PARÁMETROS CARACTERIZAN LA CONDUCTA DEL CIRCUITO RLC.

EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO PARA ESTA EC. DIF. ES:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

LAS RAÍCES DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO SON LAS FRECUENCIAS NATURALES DEL CIRCUITO

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

LA FORMA DE LA RESPUESTA DE ENTENSA CIERNO DEPENDIENDO DE LOS VALORES RELATIVOS DE α Y ω_0 .

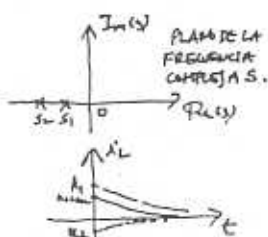
HAY 4 CASOS:

(1) SOBREAMORTIGUADO ($\alpha > \omega_0$)

$s_{1,2}$ REALES NEGATIVAS

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

k_1 Y k_2 REALES DEPENDIENDO DE LA C.I.

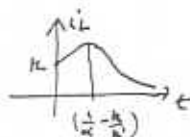
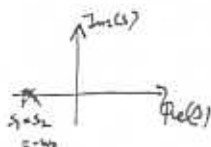


(2) CRITICAMENTE AMORTIGUADO ($\alpha = \omega_0$)

$s_{1,2} = -\alpha = -\omega_0$ SON IGUALES Y REALES

$$i_L(t) = (k + k' t) e^{-\alpha t}$$

k Y k' CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LA C.I.



(3) INFRAMORTIGUADO ($\alpha < \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad \text{SON COMPLEJAS CONJUGADAS}$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d \quad s_2 = \bar{s}_1$$

$$\text{DONDE } \omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

LA RESPUESTA ES DE LA FORMA

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

SEA $k_1 = |k_1| e^{j\phi_1}$, $i_L(t)$ REAL IMPLICA QUE $k_2 = \bar{k}_1 = |k_1| e^{-j\phi_1}$

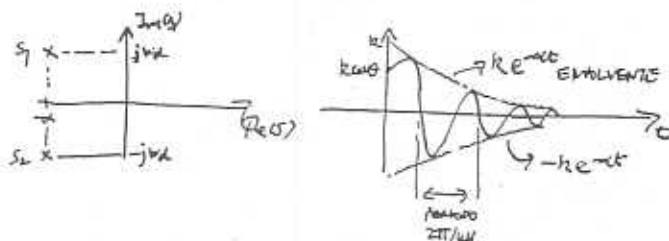
$$\Rightarrow i_L(t) = k_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + \bar{k}_1 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}$$

$$= 2|k_1| e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j(\omega_d t + \phi_1)} + e^{-j(\omega_d t + \phi_1)}}{2} \right]$$

$$i_L(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

DONDE $K = 2|k_1|$, $\theta = \phi_1$ CONSTANTES REALES QUE DEPENDEN DE LA C.I.

INFRAMORTIGUADO (CONTINUACIÓN)



(4) SIN PÉRDIDAS ($\alpha = \frac{R}{2L} = 0 \Rightarrow R=0$)

$$s_1 = j\omega_0 \quad \text{FRECUENCIAS NATURALES IMAGINARIAS}$$

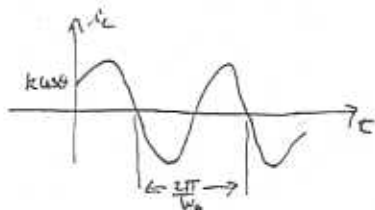
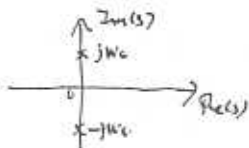
$$s_2 = -j\omega_0$$

$$i_L(t) = k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t}$$

$$= 2|k_1| \left[\frac{e^{j(\omega_0 t + \phi_1)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi_1)}}{2} \right]$$

$$i_L(t) = K \cos(\omega_0 t + \theta)$$

DONDE $K = 2|k_1|$ Y $\theta = \phi_1$ CONSTANTES REALES QUE DEPENDEN DE LA C.I.



CASO SIN PÉRDIDAS (CONTINUACIÓN)

LA ENERGÍA TOTAL ALMACENADA EN EL CIRCUITO LC ES

$$W_{LC}(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) + \frac{1}{2} C v_C^2(t)$$

$$i_L(t) = K \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\Rightarrow v_C = \frac{1}{C} \int i_L dt = -\frac{1}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$W_{LC}(t) = \frac{1}{2} L K^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) + \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{\omega_0 C} \right)^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow W_{LC}(t) = \frac{1}{2} L K^2 [\cos^2(\omega_0 t + \theta) + \sin^2(\omega_0 t + \theta)]$$

$$W_{LC}(t) = \frac{1}{2} L K^2 \quad \forall t$$

LA ENERGÍA SE MANTIENE CONSTANTE

$$W_{LC}(t) = W_{LC}(0) = \frac{1}{2} L i_L^2(0) + \frac{1}{2} C v_C^2(0) \quad \forall t > 0$$

LA ENERGÍA SE TRANSFIERE CONTINUAMENTE ENTRE EL CAPACITOR Y EL INDUCTOR SIN PÉRDIDA ALGUNA

$\Rightarrow$ OSCILACIÓN

CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN

CIRCUITO RLC PARALELO LINEAL INVARIANTE
RESPUESTA DE ENTRADA-CERO: HAY 4 CASOS.

A) SOBREAMORTIGUADO

$$i_L(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$i_L(0) = k_1 + k_2 = I_0$$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{V_0}{L} - \lambda_2 I_0 \right)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = k_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \frac{V_0}{L}$$

$$k_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{V_0}{L} - \lambda_1 I_0 \right)$$

B) CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\alpha t}$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\alpha(k_1 + k_2 t) e^{-\alpha t} + k_2 e^{-\alpha t}$$

$$i_L(0) = k_1 = I_0, \quad \frac{di_L(0)}{dt} = -\alpha k_1 + k_2 = \frac{V_0}{L} \Rightarrow k_2 = \alpha I_0 + \frac{V_0}{L}$$

C) INFRAMORTIGUADO

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

$$i_L(0) = k \cos \theta = I_0$$

$$k = I_0 / \cos \theta$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\alpha k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) - k e^{-\alpha t} \omega_d \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = -\alpha I_0$$

$$\Rightarrow \tan \theta = -\left(\frac{\alpha}{\omega_d} + \frac{V_0}{\omega_d I_0 L} \right)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \left[\frac{\alpha}{\omega_d} + \frac{V_0}{\omega_d I_0 L} \right]$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -k \omega_d \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = -k \omega_d \sin \theta = \frac{V_0}{L}$$

$$\theta = -\tan^{-1} \left[\frac{V_0}{\omega_d I_0 L} \right]$$

D) SIN PERDIDAS

$$i_L(t) = k \cos(\omega_d t + \theta)$$

$$i_L(0) = I_0 = k \cos \theta$$

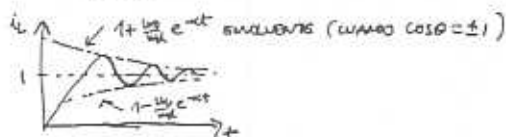
$$k = I_0 / \cos \theta$$

EL TERMINO * DE (1) SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$\frac{1}{2j\omega_d} e^{-\alpha t} (e^{j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \theta)} - e^{-j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \theta)})$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\omega_d} e^{-\alpha t} 2j \sin(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\therefore i_L(t) = \left[\frac{-\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) + 1 \right] u(t)$$



INFRAMORTIGUADO

EN EL CASO SOBREAMORTIGUADO (RAÍCES REALES Y $\neq$)



SOBREAMORTIGUADO

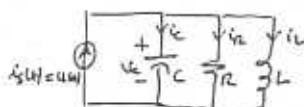
EN $t=0^+$ EL VOLTAJE EN EL CAPACITOR Y LA CORRIENTE EN LA INDUCTANCIA NO CAMBIAN INSTANTANEAMENTE

$$i_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = 0 \Rightarrow i_C = \frac{v_C(0)}{L} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i_C(0) = 1 \\ i_L(0) = 0 \end{array} \right.$$

TODA LA CORRIENTE INICIAL VA AL CAPACITOR.
EN $t=0^+$ EL CAPACITOR ACTUA COMO UN CORTO-CIRCUITO.

RESPUESTA AL ESCALON



$$L C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + L G \frac{di_L}{dt} + i_L = u(t)$$

$$i_L(0) = 0, \quad \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

SOL PARTICULAR $i_p(t) = 1$ PARA $t \geq 0$

SOL GENERAL ES DE LA FORMA

$$i_L(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + 1 \quad \text{SI LAS FREC. NATURALES SON } \neq$$

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\alpha t} + 1 \quad \text{SI LAS FREC. NATURALES SON } =$$

PARA EL CASO DE FRECUENCIAS NATURALES DISTINTAS

$$i_L(0) = k_1 + k_2 + 1 = 0$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{array} \right.$$

LA RESPUESTA AL ESCALON ES

$$\Delta u(t) = \left[\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + 1 \right] u(t) \quad (1)$$

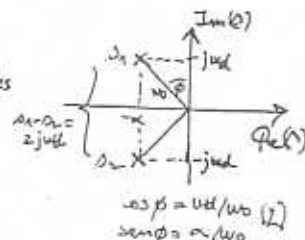
EN EL CASO INFRAMORTIGUADO

$$\lambda_1 = -\alpha + j\omega_d = \omega_0 e^{j(\phi + \pi/2)}$$

$$\lambda_2 = -\alpha - j\omega_d = \omega_0 e^{-j(\phi + \pi/2)}$$

$$\text{DONDE } \omega_0 = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega_d}$$



$$\cos \phi = \omega_d / \omega_0$$

$$\sin \phi = \alpha / \omega_0 \quad (2)$$

A MAYOR QUE PASA EL TIEMPO, AUMENTA ω_d Y LA CORRIENTE FLUYE POR i_L E i_C . DESPUÉS DE UN TIEMPO SUFICIENTEMENTE LARGO EL CIRCUITO ALCANZA EL RÉGIMEN PERMANENTE

$$\frac{di_L}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0 \Rightarrow i_L = i_C u(t) = 1$$

TODA LA CORRIENTE DE LA FUENTE SE VA POR LA INDUCTANCIA

$$v_C = v_L = v_R = 0; \quad i_L = 0, \quad i_C = 0$$

EN $t \rightarrow \infty$ LA INDUCTANCIA ACTUA COMO UN CORTO-CIRCUITO A UNA FUENTE DE CORRIENTE CONSTANTE

RESPUESTA AL IMPULSO

$$L C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + L G \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t) \quad (3)$$

$$i_L(0) = 0, \quad \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

MÉTODO 1 $h(t) = \frac{d i_L}{dt}$ PARA CIRCUITOS LINEALES INVARIANTES

$$h(t) = \left[\frac{-\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) + 1 \right] u(t)$$

$$h(t) = \frac{d i_L}{dt} = \delta(t) \left[\frac{-\omega_0}{\omega_d} \cos \theta + 1 \right] + u(t) \left[\alpha \cos(\omega_d t - \theta) - \omega_d \sin(\omega_d t - \theta) \right] \left(\frac{-\omega_0}{\omega_d} \right) e^{-\alpha t}$$

NO DE (2)

$$h(t) = u(t) \left[\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}}{\omega_0} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{\omega_d}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}} \sin(\omega_d t - \theta) \right\} \right] \quad (4)$$

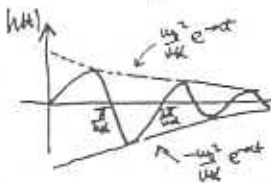
DE (2) Y LA IGUALDAD TRIGONOMÉTRICA

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

SE TIENE QUE

$$\text{CON } \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \phi$$

$$V_L(t) = V_m \left[\frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \right]$$



MÉTODO 2. USO DIRECTO DE LA EC DIFERENCIAL

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t) \quad \times \int_0^{0^+} (\cdot)$$

$$LC \frac{di_L}{dt}(0^+) - LC \frac{di_L}{dt}(0^-) + LG i_L(0^+) - LG i_L(0^-) + \int_0^{0^+} i_L(t) dt = 1$$

i_L NO PUEDE SALTAR EN $t=0$, ES UNA FUNCIÓN CONTINUA

$$\int_0^{0^+} i_L(t) dt = 0 \quad \text{Y} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

$$\text{SI } i_L = u(t) \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \delta(t) \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \delta'(t)$$

Y LA EC (3) NO SE PUEDE SATISFACER.

$$\therefore \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{LC}$$

PARA $t > 0$ LA EC (3) ES EQUIVALENTE A

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \quad (5)$$

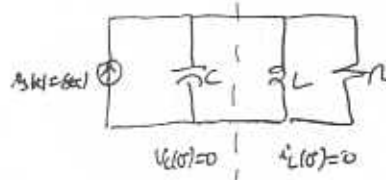
$$i_L(0^+) = 0, \quad \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{LC}$$

EN EL CASO SUPERCRÍTICO, LA SOLUCIÓN DE (5) ES

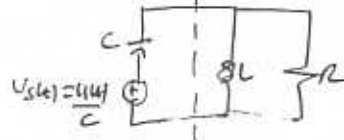
$$i_L(t) = u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$$

EQUIVALE A UNA RESPUESTA DE ENTRADA-CERO CON CONDICIONES INICIALES

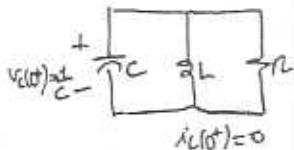
$$i_L(0^+) = 0 \quad \text{Y} \quad v_C(0^+) = \frac{1}{C}$$



EQUIVALENTE THEVENIN $v_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx \quad t \geq 0$



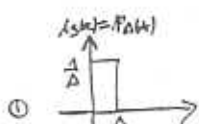
ES EQUIVALENTE A



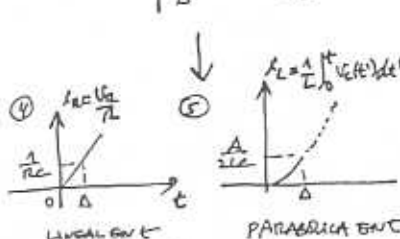
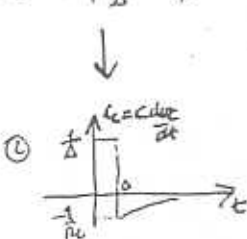
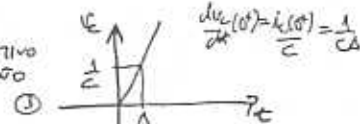
$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{1}{C}$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{L} v_C(0^+) = \frac{1}{LC}$$

RESPUESTA AL IMPULSO: RLC PARALELO
REPRESENTACIÓN FÍSICA



Δ PULSO Y POSITIVO
PERO PEQUEÑO



$$\text{EN } t=0^+ \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \\ i_C(0^+) = i_C(0^-) = \frac{1}{\Delta}$$

TOCA LA CORRIENTE
DE LA FUENTE VA
AL CAPACITOR

CUANDO $\Delta \rightarrow 0$ EL GRÁFICO DE
APROXIMACIÓN SE HACE COMO

$$i_L(t) = \delta(t) \\ v_C \text{ SALTA DE } 0 \text{ A } 1/C \\ i_C(t) = \delta(t), \quad i_C \text{ SALTA DE } 0 \text{ A } 1/C \\ i_L(0^+) = -i_C(0^+) = -1/C$$

Table 8.1 Zero-Input Response of a Second-order Circuit

$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx$ $v_C(0) = \frac{1}{C}$ $i_L(0) = 0$ $\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{LC} \frac{di_L}{dt}$ $\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$ $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$ $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0$ $\alpha = \frac{R}{2L}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{LC}}{R}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx$ $v_C(0) = \frac{1}{C}$ $i_L(0) = 0$ $\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{LC} \frac{di_L}{dt}$ $\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$ $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$ $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0$ $\alpha = \frac{R}{2L}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{LC}}{R}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$
---	---

Case 1 $\alpha > \omega_0$ or $Q < 0.5$. Overdamped case. $i_1 = -\alpha + \omega_d$, $i_2 = -\alpha - \omega_d$ where $\omega_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx$$

Case 2 $\alpha = \omega_0$ or $Q = 0.5$. Critically damped case. $i_1 = i_2 = -\alpha$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx$$

Case 3 $\alpha < \omega_0$ or $Q > 0.5$. Underdamped case. $i_1 = -\alpha + j\omega_d$, $i_2 = -\alpha - j\omega_d$ where $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ and $\sin \phi = \frac{\alpha}{\omega_0}$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx$$

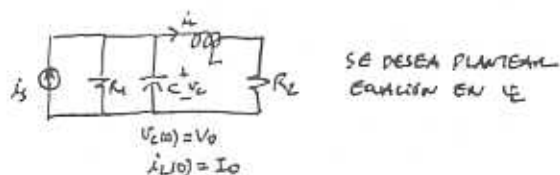
Case 4 $\alpha = 0$ or $Q = \infty$. Lossless case. $i_1 = j\omega_0$, $i_2 = -j\omega_0$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^t v_C(x) dx$$

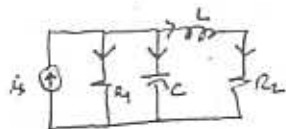
$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(x) dx$$

MÉTODOS GENERALES DE ANÁLISIS DE REDES

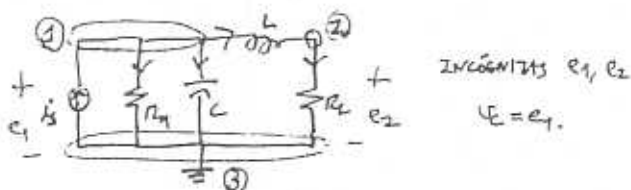
1) MÉTODO DE ANÁLISIS NODAL (LCK + ELS. DE RAMAS)



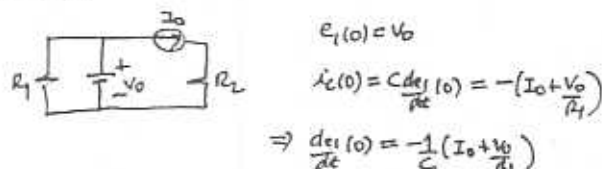
PASO 1 DARSE DIRECCIONES DE REFERENCIA PARA TODAS LAS CORRIENTES DE RAMAS Y APLICAR TRANSFORMACIONES DE FUENTES (DEJAR SOLO FUENTES DE CORRIENTE EN PARALELO CON ALGÚN ELEMENTO)



PASO 2 INTERIOR NODOS. ESCOGER UN NODO DE REFERENCIA E IDENTIFICAR LAS INCÓGNITAS (VOLTAJES DE NODO A NODO DE REFERENCIA). USUALMENTE EL NODO DE REFERENCIA ES EL TERMINAL NEGATIVO DEL ELEMENTO ACTIVO. SE IDENTIFICA POR EL SÍMBOLO TIERRA.



UNA ALTERNATIVA ES PARTIR EL CIRCUITO EN $t=0$ JUSTO ANTES DE LA APLICACIÓN DE LA ENTRADA (ESTA SE HACE CERO).



TRANSICIÓN DE (1) JUSTO ANTES DE LA APLICACIÓN DE i_s

$$0 = C \frac{dv_c(0)}{dt} + \frac{v_c(0)}{R_1} + I_o + \frac{1}{L} \int_0^0 (e_1 - e_2) dt$$

$$\Rightarrow \frac{dv_c(0)}{dt} = -\frac{1}{C} \left(I_o + \frac{v_c(0)}{R_1} \right)$$

SEA D EL OPERADOR DIFERENCIAL $\frac{d}{dt}(\cdot)$

D^{-1} LA INTEGRAL DEFINIDA $\int_0^t (\cdot) dt$

LOS OPERADORES D Y D^{-1} PUEDEN SUMARSE Y MULTIPLICARSE POR NÚMEROS REALES. PARA TODO $m, n > 0$

$$(\alpha_1 D^m + \beta_1)(\alpha_2 D^n + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 D^{m+n} + \alpha_1 \beta_2 D^m + \alpha_2 \beta_1 D^n + \beta_1 \beta_2$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

SIN EMBARGO

$$DD^{-1} \neq D^{-1}D$$

$$DD^{-1}f = f(t)$$

$$D^{-1}Df = f(t) - f(0)$$

PASO 3 APLICAR LCK A CADA NODO DE VOLTAJE DESCONOCIDO Y EXPRESAR CADA CORRIENTE DE RAMA EN TÉRMINOS DE VOLTAJE DE NODO A NODO DE REFERENCIA Y LOS PARÁMETROS DEL CIRCUITO.

$$\text{LCK NODO ①} \quad i_s = C \frac{de_1}{dt} + \frac{e_1}{R_1} + I_o + \frac{1}{L} \int_0^t (e_1 - e_2) dt \quad (1)$$

$$\text{NODO ②} \quad 0 = \frac{e_2}{R_2} - I_o + \frac{1}{L} \int_0^t (e_2 - e_1) dt \quad (2)$$

$$+ i_s = C \frac{de_1}{dt} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \quad (3) \quad \text{ECS, INTEGRAL - DIFERENCIALES}$$

DIFERENCIANDO (1)

$$\frac{di_s}{dt} = C \frac{d^2e_1}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \frac{de_1}{dt} + \frac{1}{L} (e_1 - e_2)$$

$$\Rightarrow e_2 = e_1 + \frac{L}{R_1} \frac{de_1}{dt} + LC \frac{d^2e_1}{dt^2} - L \frac{di_s}{dt} \quad (4)$$

SUSTITUYENDO (4) EN (3) $\times R_2$

$$LC \frac{d^2e_1}{dt^2} + (R_2C + \frac{L}{R_1}) \frac{de_1}{dt} + (1 + \frac{R_2}{R_1}) e_1 = R_2 i_s + L \frac{di_s}{dt}$$

PASO 4 ENCONTRAR LAS CONDICIONES INICIALES PRIMERO DETERMINAR

$$e_1(0) = v_o$$

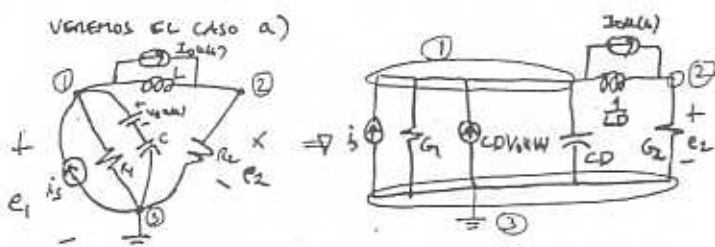
$$e_2(0) = R_2 I_o$$

FACTA DETERMINAR $\frac{de_1(0)}{dt}$

PARA HACER USO DE LOS OPERADORES D Y D^{-1} HAY QUE TRABAJAR CON CONDICIONES INICIALES NULAS

- INCORPORARLAS COMO FUENTES DESDE EL COMIENZO
- INCORPORARLAS AL FINAL, ANALIZANDO EL CIRCUITO EN $t=0$.

VEAMOS EL CASO a)



$$\text{LCK EN ①} \quad i_s = C D e_1 + G_1 e_1 + I_o u(t) + \frac{1}{L D} (e_1 - e_2) - C D v_o u(t)$$

$$\text{②} \quad 0 = G_2 e_2 - I_o u(t) + \frac{1}{L D} (e_2 - e_1)$$

REESCRIBIENDO EN FORMA MATRICIAL SE TIENE

$$\begin{bmatrix} G_1 + CD + \frac{1}{L D} & -\frac{1}{L D} \\ -\frac{1}{L D} & G_2 + \frac{1}{L D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_o u(t) + C D v_o u(t) \\ I_o u(t) \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE Δ

FUENTES INDEPENDIENTES

$D u(t) = \delta(t)$

$$\Delta = (G_1 + CD + \frac{1}{L D})(G_2 + \frac{1}{L D}) - (\frac{1}{L D})^2 = \frac{G_1 G_2}{L D} + (G_1 G_2 + \frac{C}{L}) + G_2 C D$$

Por regla de Cramer

$$e_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} i_s - I_0 u(t) + C v_0 \delta(t) & -\frac{1}{LD} \\ I_0 u(t) & G_2 + \frac{1}{LD} \end{vmatrix}$$

$$\Delta e_1 = (G_2 + \frac{1}{LD}) i_s - G_2 [I_0 u(t) - C v_0 \delta(t)] + \frac{C}{LD} v_0 \delta(t)$$

Reemplazando Δ y multiplicando por $\frac{LD}{G_2}$

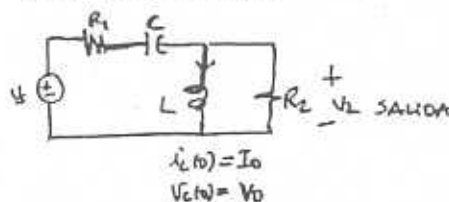
$$\left[LCD^2 + \frac{LD}{G_2} (G_1 G_2 + \frac{C}{L}) + \frac{G_1 + G_2}{G_2} \right] e_1 = (LD + \frac{1}{G_2}) i_s - LD [I_0 u(t) - C v_0 \delta(t)] + \frac{C}{G_2} v_0 \delta(t)$$

$$\frac{LD d^2 e_1}{dt^2} + (R_2 C + \frac{L}{R_1}) \frac{de_1}{dt} + (1 + \frac{R_2}{R_1}) e_1 = L \frac{di_s}{dt} + R_2 i_s + (R_2 C v_0 - L I_0) \delta(t) + L C v_0 \delta'(t)$$

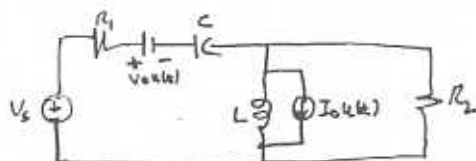
Esta ecuación diferencial se puede resolver mediante transformada de Laplace.

Las condiciones iniciales están incorporadas en la ecuación diferencial.

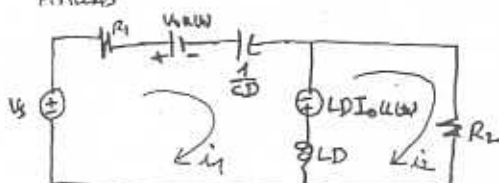
Método de análisis de mallas o de circuitos regionales (LVK + Ecs. de mallas)



Paso 1 Incorporar condiciones iniciales como fuentes. Aplicar transformaciones de fuentes (dejar solo fuentes de voltaje en serie con algún elemento)



Se da dirección de referencia para las corrientes de mallas



Paso 2: Escoger una malla de referencia, usualmente la externa. Identificar las incógnitas (corrientes de mallas) $\rightarrow i_1, i_2$

Paso 3: Aplicar LVK en cada malla y expresar cada voltaje de rama en términos de las corrientes de malla y los parámetros del circuito

LVK Malla ① $V_s = R_1 i_1 + V_0 u(t) + \frac{1}{CD} i_1 - L I_0 \delta(t) + LD(i_1 - i_2)$

② $0 = R_2 i_2 + L I_0 \delta(t) + LD(i_2 - i_1)$

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{CD} + LD & -LD \\ -LD & R_2 + LD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L I_0 \delta(t) - V_0 u(t) \\ -L I_0 \delta(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (R_1 + \frac{1}{CD} + LD)(R_2 + LD) - (LD)^2$$

$$= (R_1 R_2 + \frac{L}{C}) + \frac{R_2}{CD} + (R_1 + R_2) LD$$

$$i_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{CD} + LD & V_s + L I_0 \delta(t) - V_0 u(t) \\ -LD & -L I_0 \delta(t) \end{vmatrix}$$

$$\left[(R_1 + R_2) LD + (R_1 R_2 + \frac{L}{C}) + \frac{R_2}{CD} \right] i_2 = -L R_1 I_0 \delta(t) - \frac{L}{C} I_0 u(t) + LD V_s - L V_0 \delta(t)$$

$$\times \frac{D}{L}$$

$$\left[(R_1 + R_2) D^2 + (R_1 R_2 + \frac{1}{C}) D + \frac{R_2}{LC} \right] i_2 = D^2 V_s - R_1 I_0 \delta'(t) - \frac{1}{C} I_0 \delta(t) - V_0 \delta'(t)$$

$$(R_1 + R_2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + (R_1 R_2 + \frac{1}{C}) \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{LC} i_2 = \frac{d^2 V_s}{dt^2} - \frac{I_0 \delta(t)}{C} - (R_1 I_0 + V_0) \delta'(t)$$

Propósito:

Calcular $i_2(0)$ y $\frac{di_2}{dt}(0)$ usando el circuito en $t=0$.

$$i_2(0) = -\frac{(V_0 + I_0 R_1)}{(R_1 + R_2)}$$

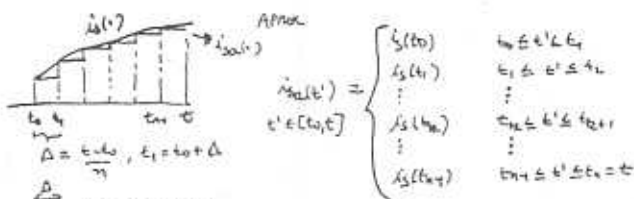
$$\frac{di_2}{dt}(0) = \frac{-R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} i_2(0) - \frac{(i_2(0) + I_0)}{(R_1 + R_2) C}$$

RESPUESTA A UNA ENTRADA ARBITRARIA

LA RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$ DE UN CIRCUITO LINEAL INVARIANTE SE PUEDE USAR PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO A CUALQUIER ENTRADA ARBITRARIA.

SEA $i_s(t)$ LA ENTRADA APLICADA EN $t=t_0$, CON $i_s(t) = 0 \quad \forall t < t_0$.

CONSIDEREMOS LA APROXIMACIÓN ESCALONADA DE i_s EN (t_0, t)



LA APROXIMACIÓN $i_{sa}(t')$ SE PUEDE INTERPRETAR COMO LA SUMA DE PULSOS RECTANGULARES DEL MISMO ANCHO Δ , PERO DISTINTA ALTURA Y POSICIÓN A LO LARGO DEL TIEMPO.

LUEGO
$$i_{sa}(t') = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta$$

CALCULEMOS LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO A UNA ENTRADA $i_{sa}(t')$

$$z_0[i_{sa}(t')] = \sum_{k=0}^{n-1} z_0[i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta] \quad \text{POR LINEALIDAD}$$

BASTA ENCONTRAR LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO DEL CIRCUITO AL PULSO $i_{\Delta}(t) = i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta$

SEA $h_{\Delta}(t)$ LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO DEL CIRCUITO A $i_{\Delta}(t)$. ENTONCES POR LINEALIDAD E INVARIANCIA SE TIENE QUE

$$\begin{aligned} z_0[i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta] &= z_0[i_s(t_k) \int_{t_k}^{t_k+\Delta} p_{\Delta}(t') dt'] \Delta \\ &= i_s(t_k) z_0[\int_{t_k}^{t_k+\Delta} p_{\Delta}(t') dt'] \Delta = i_s(t_k) \int_{t_k}^{t_k+\Delta} [z_0 p_{\Delta}(t')] \Delta \\ &= i_s(t_k) h_{\Delta}(t' - t_k) \Delta \end{aligned}$$

$$\therefore z_0[i_{sa}(t')] = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k) h_{\Delta}(t' - t_k) \Delta \quad (1)$$

EL INTERVALO $t - t_0$ ES FIJO, LUEGO SI $n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta \rightarrow 0$

CUANDO $\Delta \rightarrow 0$

$$i_{sa}(t) \rightarrow i_s(t)$$

$$z_0[i_{sa}(t)] \rightarrow v(t) = z_0[i_s(t)]$$

$$h_{\Delta}(t) = z_0[p_{\Delta}(t)] \rightarrow h(t) = z_0[\delta(t)]$$

CUANDO $\Delta \rightarrow 0$ LA SUMA (1) SE TRANSFORMA EN LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

$$v(t) = \int_{t_0}^t i_s(t') h(t - t') dt' \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO DE CUALQUIER CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE A UNA ENTRADA ARBITRARIA SE TIENE QUE:

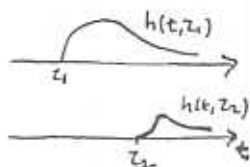
1. DETERMINAR LA RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$
2. CALCULAR LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN (2)

LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO DE UN CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE A UNA ENTRADA ARBITRARIA, ES UNA FUNCIÓN LINEAL DE LA FORMA DE ONDA DE LA ENTRADA $i_s(t)$

CIRCUITOS LINEALES-VARIANTES

EL CONCEPTO DE RESPUESTA AL IMPULSO APLICA TAMBIÉN A CIRCUITOS LINEALES VARIANTES.

SEA $h(t, t_1)$ LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO EN t DEBIDO A UN IMPULSO APLICADO EN t_1 .



EN GENERAL PARA UN CIRCUITO LINEAL-VARIANTE

$$h(t, t_1) \neq h(t, t_2)$$

PARA $t_1 \neq t_2$.

PARA CIRCUITOS LINEALES VARIANTES SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO ES UNA FUNCIÓN LINEAL DE LA ENTRADA (i_s ARBITRARIA APLICADA EN t_0)

$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t, t') i_s(t') dt' \quad t \geq t_0 \quad (3)$$

PARA CIRCUITOS INVARIANTES

$$h(t, t_1) = h(t - t_1, 0) \quad \forall T$$

YA QUE ESTA ECUACIÓN ES VÁLIDA PARA TODO T , EL NÚMERO $h(t, t_1)$ ESTÁ ÚNICAMENTE DEFINIDO POR LA DIFERENCIA $t - t_1$. P. EJEMPLO $T = -t_1 \Rightarrow h(t - t_1, 0)$.

LA RESPUESTA DE ESTADO-CERO EN t DE UN CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE DEBIDO A UN IMPULSO APLICADO EN t_1 ES UNA FUNCIÓN DE $t - t_1$, DONDE t ES EL INSTANTE DE OBSERVACIÓN Y t_1 ES EL INSTANTE EN QUE SE APLICA EL IMPULSO.

RESPUESTA COMPLETA

PARA CUALQUIER CIRCUITO LINEAL VARIANTE O INVARIANTE

$$y(t) = z(t) + \int_{t_0}^t h(t, t') w(t') dt' \quad t \geq t_0$$

↓ ↓ ↓
RESPUESTA COMPLETA RESPUESTA DE ESTADO-CERO RESPUESTA DE ESTADO-CERO

CALCULO DE INTEGRALES DE CONVOLUCION

$$\textcircled{1} \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t'-t_0) dt' = h(t-t_0) \quad t > t_0$$

$\delta(t-t_0)$: impulso aplicado en $t=t_0$

DEM.

$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t'-t_0) dt' = \int_{t_0}^{t_0+t} h(t-t') \delta(t'-t_0) dt'$$

YA QUE $\delta(t'-t_0)$ ES CERO EXCEPTO EN $t'=t_0$

PARA CIRCUITOS CONCENTRADOS LINEALES INVARIANTES,
h ES UNA FUNCION CONTINUA EN $(0, \infty)$

$$v(t) = h(t-t_0) \int_{t_0}^{t_0+t} \delta(t'-t_0) dt' = h(t-t_0) \quad t > t_0 > t_0$$

NOTA: SI SE CONOCE LA RESPUESTA AL IMPULSO APLICADO EN $t=0$, $h(t)$, ENTONCES LA RESPUESTA A UN IMPULSO APLICADO EN $t=t_0$ ES $h(t-t_0)$ SI LA RED ES LINEAL E INVARIANTE.

$$\textcircled{2} \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t h(t') i_s(t-t') dt' \quad t \geq 0$$

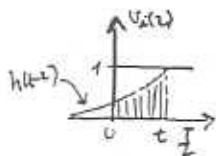
SEA $t-t'=z \Rightarrow t'=t-z, -dt'=dz \in \mathbb{R}$

$$v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_{t-t}^0 h(z) i_s(t-z) (-dz)$$

$$= \int_0^{t-t} h(z) i_s(t-z) dz = \int_0^{t-t} h(z) i_s(t-z) dz$$

Si $t_0=0$ SE CUMPLE LA IGUALDAD A DEMOSTRAR Y HAY UN PAZ SIMETRIA DE LA ENTRADA Y LA RESPUESTA AL IMPULSO.

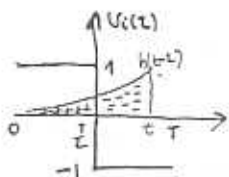
PARA EL INTERVALO $0 \leq t \leq T/2$



$$v_0(t) = \int_0^t v_0(z) h(t-z) dz$$

$$= \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-z)} dz = (1 - e^{-t})$$

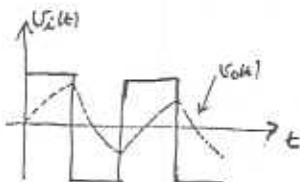
PARA EL INTERVALO $T/2 \leq t \leq T$



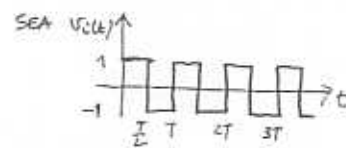
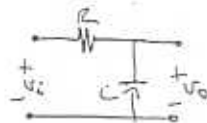
$$v_0(t) = \int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-(t-z)} dz + \int_{T/2}^t (-1) e^{-(t-z)} dz$$

$$= e^{-(t-T/2)} \Big|_0^{T/2} - e^{-(t-z)} \Big|_{T/2}^t$$

$$= 2e^{-(t-T/2)} - e^{-t} - 1$$



CONVOLUCION GRAFICA



$$v_i = v_o + RC \frac{dv_o}{dt}$$

CALCULAMOS LA RESPUESTA AL IMPULSO, $v_i = \delta(t)$

$$\int_0^t \delta(t') dt' = \int_0^t v_o + RC \frac{dv_o}{dt} = RC v_o(t) - RC v_o(0^-)$$

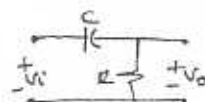
$$\Rightarrow v_o(0^+) = \frac{1}{RC} \quad h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

SEA $R=1\Omega, C=1F \therefore h(t) = e^{-t} u(t)$



$$v(t) = \int_0^t h(t-z) i_s(z) dz$$

¿QUÉ SUCEDE SI LA MISMA ENTRADA RECTANGULAR DEL PROBLEMA ANTERIOR SE APLICA AL CIRCUITO DE LA FIGURA?



$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC} v_o \quad (*)$$

CALCULAMOS LA RESPUESTA AL IMPULSO

$$h(t) = K e^{-t/RC} u(t) + \delta(t)$$

$$h'(t) = K e^{-t/RC} \delta(t) - \frac{K}{RC} e^{-t/RC} u(t) + \delta'(t)$$

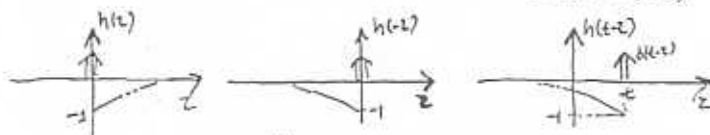
REEMPLAZANDO EN (*) Y BALANCEANDO IMPULSOS Y DERIVADAS SE OBTIENE QUE

$$K = -\frac{1}{RC}$$

$$\therefore h(t) = -\frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + \delta(t)$$

PROBLEMA:

SI $R=1\Omega, C=1F$ DETERMINAR LA RESPUESTA DE ESTADO-LENGA A LA ENTRADA DE ONDA RECTANGULAR $v_i(t)$



$$v_0(t) = \int_0^t v_i(z) h(t-z) dz$$

DIBUJAR $v_i(t)$ Y $v_0(t)$.

CONTROL N°2 PARTE TEÓRICA

P6) UN CAPACITOR SE DICE ACTIVO SI LA ENERGÍA QUE INGRESA AL CAPACITOR DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO CUALQUIERA ES NEGATIVA, I.E.

$$W_L[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v_C(t) i_C(t) dt < 0 \text{ PARA CUALQUIER } t_1, t_2.$$

ERRORES MÁS COMUNES

① CAPACITOR ES ACTIVO SI SU CARACTERÍSTICA $v-i$ NO SE ENCUENTRA EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTE PASANDO POR EL ORIGEN.

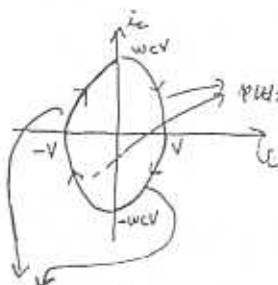
SEA $C [F]$ UN CAPACITOR LINEAL-INVARIANTE



$$v_C = V \sin \omega t$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} = \omega C V \cos \omega t$$

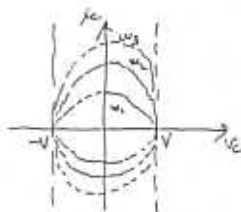
$$\therefore \frac{v_C^2}{V^2} + \frac{i_C^2}{(\omega C V)^2} = 1 \quad \text{LUGAR EN PLANO } v-i \text{ ES UNA ELIPSE}$$



$p(t) = v_C(t) i_C(t) > 0$ ENERGÍA ENTREGADA A C POR EL CIRCUITO.

$p(t) = v_C(t) i_C(t) < 0$ ENERGÍA ES DEVUELTA POR C AL CIRCUITO

SI VARIAMOS LA FRECUENCIA DE $\omega = 0$ A $\omega = +\infty$, SE TIENE QUE LA ELIPSE PASARÁ POR CUALQUIER PUNTO EN LA FRONTERA VERTICAL $-V \leq v_C \leq V$



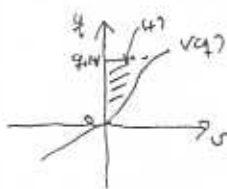
POR LO TANTO NO TIENE SENTIDO DESLIZAR AL CAPACITOR (O INDUCTOR) POR UNA LÍNEA CARACTERÍSTICA EN EL PLANO $v-i$

② UN ELEMENTO ES ACTIVO SI $p(t) = v(t) i(t) < 0$

UN ELEMENTO SE DICE PASIVO SI NO GENERA ENERGÍA, ES DECIR SI NUNCA ENTREGA UNA CANTIDAD NETA DE ENERGÍA AL CIRCUITO.

EN EL CASO DEL CAPACITOR SE USA EL CONCEPTO DE ENERGÍA "ALMACENADA". EL ESTADO DESCARGADO CORRESPONDE A ENERGÍA ALMACENADA CERO. LUEGO LA ENERGÍA ALMACENADA EN EL CAPACITOR EN CUALQUIER INSTANTE t ES (SUPONIENDO CARGADO POR CARGA)

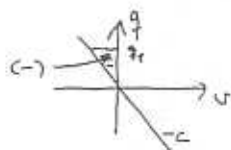
$$W_C(t) = \int_0^t v_C(q) dq$$



SI LA CARACTERÍSTICA $v-q$ PASA POR EL ORIGEN Y ESTÁ EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTE, LA ENERGÍA ALMACENADA ES SIEMPRE NO-NEGATIVA

③ UN CAPACITOR NO ES ACTIVO, ES PASIVO

EN EL CASO LINEAL INVARIANTE, LAS RESISTENCIAS, CAPACITANCIAS E INDUCTANCIAS SON PASIVAS SI Y SOLO SI $R \geq 0$, $C \geq 0$, $L \geq 0$.



UN CAPACITOR ACTIVO ALMACENA ENERGÍA NEGATIVA, ES DECIR ENTREGA ENERGÍA AL MUNDO EXTERIOR. ES POSIBLE OBTENER CAPACITANCIAS NEGATIVAS DENTRO DE PEQUEÑOS RANGOS DE OPERACIÓN.

RESPUESTA:

FALSO, UN CAPACITOR SE DICE ACTIVO SI PUEDE GENERAR ENERGÍA. ESTO OCURRE SI SU CARACTERÍSTICA $v-q$ PASA POR EL SEGUNDO O CUARTO CUADRANTE (P.E. $C < 0$)

UN CAPACITOR PASIVO PUEDE ACUMULAR ENERGÍA EN SU CAMPO ELÉCTRICO Y LUEGO DEVOLVERLA AL CIRCUITO EN UN INTERVALO DE TIEMPO DADO. SERÁ PASIVO EN LA MEDIDA QUE LA ENERGÍA NETA ALMACENADA SEA NO-NEGATIVA.

REPRESENTACIÓN DE ENTRADA-SALIDA

PARA CIRCUITOS LINEALES-INVARIANTES CON UNA ENTRADA Y UNA SALIDA, LA RELACIÓN ENTRADA-SALIDA PUEDE EN GENERAL EXPRESARSE COMO UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE n -ÉSIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES DE LA FORMA

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n w}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dw}{dt} + b_0 w \quad (1)$$

DONDE y : SALIDA; w : ENTRADA.

LOS COEFICIENTES a_i, b_i DEPENDEN DE LOS VALORES DE LOS ELEMENTOS Y LA TOPOLOGÍA DEL CIRCUITO.

LAS CONDICIONES INICIALES SON:

$$y(0), \frac{dy}{dt}(0), \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0)$$

ESTA EC. DIF. SE OBTIENE DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF Y DE LAS ECS DE RAMAS MEDIANTE ANÁLISIS MODAL O DE MALLAS.

LAS CONDICIONES INICIALES SE OBTIENEN DEL ESTADO INICIAL DEL CIRCUITO Y DE LAS ECS. DE LA RED.

RESPUESTA DE ENTRADA-CERO

EL LADO DERECHO DE (1) ES CERO $\Rightarrow$ EC. DIF. HOMOGÉNEA. POLINOMIO CARACTERÍSTICO ES

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Y A LOS CEROS DE ESTE POLINOMIO $s_i, i=1, \dots, n$ SE LES LLAMA FRECUENCIAS NATURALES DE LA VARIABLE DE RED.

LA SOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA ES

$$y(t) = \sum_{k=1}^m k_k e^{s_k t} \quad \text{LAS CONSTANTES } k_k \text{ SE DETERMINAN A PARTIR DE LAS CONDICIONES INICIALES.}$$

(SI LAS FRECUENCIAS NATURALES SON DISTINTAS SINO DEBEN INCLUIRSE POTENCIAS DE t).

RESPUESTA DE ESTADO-CERO

$$y(t) = \sum_{k=1}^m k_k e^{s_k t} + y_p(t) \quad \rightarrow \text{SOLUCIÓN PARTICULAR DE (1)}$$

LAS m CONSTANTES k_k SE DETERMINAN POR LAS CONDICIONES INICIALES

$$y(0^+), \frac{dy}{dt}(0^+), \dots, \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}(0^+) \text{ IGUALES A CERO.}$$

RESPUESTA AL IMPULSO

SE PUEDE CALCULAR DIRECTAMENTE DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL, BALANZANDO LAS FUNCIONES SINGULARES DEL LADO DERECHO DE (1) CON FUNCIONES SINGULARES EN EL LADO IZQUIERDO.

HAY TRES CASOS:

- ① CASO PROPIO $m \geq m$
LA RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$ NO CONTIENE FUNCIONES SINGULARES, PERO $\frac{d^m h}{dt^m}$ INCLUYE $\delta^{(m)}$ COMO REQUIERE (1).

EJEMPLO:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w \quad (*)$$

EN ESTE CASO $m=2$, $M=1$, CASO PROPIO
LA RESPUESTA AL IMPULSO NO CONTIENE FUNCIONES SINGULARES

$$s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h(t) = (k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}) u(t)$$

$$h^{(1)}(t) = (k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}) \delta(t) + (k_1 s_1 e^{s_1 t} + k_2 s_2 e^{s_2 t}) u(t) = (k_1 + k_2) \delta(t) + (k_1 s_1 e^{s_1 t} + k_2 s_2 e^{s_2 t}) u(t)$$

$$h^{(2)}(t) = (k_1 + k_2) \delta'(t) + (k_1 s_1 + k_2 s_2) \delta(t) + (k_1 s_1^2 e^{s_1 t} + k_2 s_2^2 e^{s_2 t}) u(t)$$

REEMPLAZANDO EN (*) PARA $w = \delta(t)$, $y = h(t)$

$$h^{(1)}(t) + h^{(1)}(t) + h(t) = \delta^{(1)}(t) + \delta(t)$$

$$\text{BALANZANDO DOBLES: } (k_1 + k_2) \delta'(t) = \delta'(t) \Rightarrow k_1 + k_2 = 1 \quad (3)$$

$$\text{BALANZANDO IMPULSOS: } (k_1 + k_2) \delta(t) + (k_1 s_1 + k_2 s_2) \delta(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow k_1(1 + s_1) + k_2(1 + s_2) = 1 \quad (4)$$

$$\text{DE (3) Y (4)} \quad k_1 = \frac{-s_2}{s_1 - s_2} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$k_2 = \bar{k}_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

- ② $m = m$ LA RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$ INCLUYE UN IMPULSO $\delta(t)$

- ③ $m < m$ LA RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$ INCLUYE MÁS DE UNA FUNCIÓN SINGULAR, Y LOS COEFICIENTES DE POCO ASIGNADOS A CADA FUNCIÓN SINGULAR SE OBTIENEN FÁCILMENTE BALANZANDO AMBOS LADOS DE LA ECUACIÓN.

EN EL CASO PROPIO ($m \geq m$) LA RESPUESTA AL IMPULSO ES IDÉNTICA A UNA RESPUESTA DE ENTRADA-CERO CON CONDICIONES INICIALES EN $t = 0^+$

ESTO SE DEBE A QUE POR DEFINICIÓN

$$y(t) = 0 \quad \text{PARA } t < 0$$

$$\dot{y}(t) = 0 \quad \text{PARA } t < 0$$

!

$$\delta^{(m)}(t) = 0 \quad \text{PARA } t < 0$$

POR LO TANTO EL LADO DERECHO DE (1) ES CERO PARA $t < 0$.

LAS FUNCIONES SINGULARES AL LADO DERECHO DE (1) ESPECIFICAN LAS CONDICIONES INICIALES EN $t = 0^+$, ES DECIR LAS CONDICIONES INMEDIATAMENTE DESPUÉS DE LA APLICACIÓN DEL IMPULSO. ESTAS CONDICIONES SON $h(0^+)$, $h^{(1)}(0^+)$, ..., $h^{(m-1)}(0^+)$.

SUPONIENDO QUE TODAS LAS FRECUENCIAS NATURALES SEAN DISTINTAS, LA RESPUESTA AL IMPULSO SEÑAL DE LA FORMA

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^m k_k e^{s_k t} \right) u(t) \quad (2)$$

NÚMEROS COMPLEJOS

$z = x + jy$ REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS RECTANGULARES

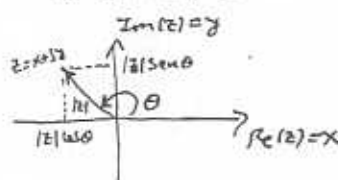
$$\text{Re}(z) = x, \text{Im}(z) = y$$

$z = |z| e^{j\theta}$ REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POLARES

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$x = |z| \cos \theta, \quad y = |z| \sin \theta$$



NOTA: HAY QUE CONSIDERAR LOS SIGNOS DE $\text{Re}(z)$ Y $\text{Im}(z)$ PARA ESPECIFICAR EL WADRANTE.

SINUSOIDE

$$A_m \cos(\omega t + \phi)$$

PARA $t \in (-\infty, \infty)$

AMPLITUD

FASE

FRECUENCIA ANGULAR ω [rad/sec]

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

FASORES

FASOR: NÚMERO COMPLEJO QUE REPRESENTA UNA SINUSOIDE DE DETERMINADA FRECUENCIA

FASOR

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \dot{A} = A_m e^{j\phi} = |A| \angle \phi$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) &= \text{Re}(A_m e^{j(\omega t + \phi)}) \\ &= \text{Re}[A_m \cos(\omega t + \phi) + j A_m \sin(\omega t + \phi)] \\ &= A_m \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\dot{A} e^{j\omega t}) = y(t) = A_m \sin(\omega t + \phi)$$

EJEMPLO SEA $v(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi 50t + \pi/3)$ [V]
 SE REPRESENTA POR EL FASOR $\dot{A} = \sqrt{2} 220 e^{j\pi/3} = \sqrt{2} 220 \angle 60^\circ$

LEMA 1 SEAN $\dot{A}$ Y $\dot{B}$ NÚMEROS COMPLEJOS

$$\text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\dot{B} e^{j\omega t}) \quad \forall t \Rightarrow \dot{A} = \dot{B}$$

$$\dot{A} = \dot{B} \Rightarrow \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\dot{B} e^{j\omega t})$$

EJ. 1

$$A_m \cos \omega t + B_m \sin \omega t \rightarrow A_m \angle 0^\circ + B_m \angle -\frac{\pi}{2}$$

$$= \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\uparrow \text{Re}[\sqrt{A_m^2 + B_m^2} e^{-j\phi} e^{j\omega t}]$$

$$\begin{aligned} &= A_m - j B_m \\ &= \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \angle -\phi \\ &\phi = \tan^{-1} \frac{B_m}{A_m} \end{aligned}$$

EJ. 2

$$A_m \cos(\omega t + \phi_1) + B_m \cos(\omega t + \phi_2) + \frac{d}{dt} C_m \cos(\omega t + \phi_3) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\text{Re}[A_m e^{j(\omega t + \phi_1)}] + \text{Re}[B_m e^{j(\omega t + \phi_2)}] + \frac{d}{dt} \text{Re}[C_m e^{j(\omega t + \phi_3)}] \\ \text{LEMA 2} \Rightarrow &\text{Re}[A_m e^{j\omega t} e^{j\phi_1}] + \text{Re}[B_m e^{j\omega t} e^{j\phi_2}] + \text{Re}[j\omega C_m e^{j\omega t} e^{j\phi_3}] \\ \text{LEMA 1} \Rightarrow &\text{Re}[(A_m e^{j\phi_1} + B_m e^{j\phi_2} + j\omega C_m e^{j\phi_3}) e^{j\omega t}] \\ &= \text{Re}[(\dot{A} + \dot{B} + j\omega \dot{C}) e^{j\omega t}] \\ &= \text{Re}[\dot{S} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

LEMA 3 $\rightarrow \dot{S} = \dot{A} + \dot{B} + j\omega \dot{C}$ PUNTO QUE REPRESENTA A SINUSOIDE QUE CORRESPONDE A LA SUMA DE (*)

TEOREMA PRINCIPAL

LA SUMA ALGEBRAICA DE CUALQUIER NÚMERO DE SINUSOIDES DE LA MISMA FRECUENCIA ANGULAR ω , Y DE CUALQUIER NÚMERO DE SUS DERIVADAS DE CUALQUIER ORDEN ES TAMBIÉN UNA SINUSOIDE DE LA MISMA FRECUENCIA ANGULAR ω .

LA DEMOSTRACIÓN DE ESTE TEOREMA SE BASA EN TRES LEMAS RELATIVOS AL OPERADOR $\text{Re}(\cdot)$

LEMA 1 SEAN z_1, z_2 COMPLEJOS

$$\text{Re}[z_1(t) + z_2(t)] = \text{Re}[z_1(t)] + \text{Re}[z_2(t)] \quad \text{Aditividad}$$

$$\text{Re}[\alpha z_1(t)] = \alpha \text{Re}[z_1(t)], \quad \alpha \text{ real} \quad \text{Homogeneidad}$$

LEMA 2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) &= \frac{d}{dt} \text{Re}(A_m e^{j(\omega t + \phi)}) = \frac{d}{dt} [A_m \cos(\omega t + \phi)] \\ &= -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) = \text{Re}(j\omega A_m e^{j(\omega t + \phi)}) \\ &= \text{Re}(j\omega \dot{A} e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) = \text{Re}\left(\frac{d}{dt} \dot{A} e^{j\omega t}\right) = \text{Re}(j\omega \dot{A} e^{j\omega t})}$$

LAS OPERACIONES DE TOMAR PARTE REAL Y DIFERENCIAR CONMUTAN

MÉTODO FASORIAL

PERMITE DETERMINAR LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL ORDINARIA CON COEFICIENTES CONSTANTES, CUANDO LA FUNCIÓN FORZANTE ES UNA SINUSOIDE

$$\alpha_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + \alpha_{m-1} \frac{dx}{dt} + \alpha_m x = A_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

DOBLE $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, A_m, \omega$ Y ϕ SON CONSTANTES REALES.

FASORES $\dot{A} = A_m e^{j\phi}$

$\dot{x} = x_m e^{j\psi}$ SOLUCIÓN PARTICULAR

REEMPLAZANDO $x(t) = \text{Re}(\dot{x} e^{j\omega t})$ EN (1)

$$\alpha_0 \frac{d^m}{dt^m} \text{Re}(\dot{x} e^{j\omega t}) + \dots + \alpha_m \text{Re}(\dot{x} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t})$$

POR LEMA 1

$$\frac{d^m}{dt^m} \text{Re}(\omega^m \dot{x} e^{j\omega t}) + \dots + \text{Re}(\alpha_m \dot{x} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t})$$

POR LEMA 2 APLICADO REPETIDAMENTE

$$\text{Re}[\alpha_0 (j\omega)^m \dot{x} e^{j\omega t}] + \dots + \text{Re}[\alpha_m \dot{x} e^{j\omega t}] = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t})$$

POR LEMA 1

$$\text{Re}[\{\alpha_0 (j\omega)^m + \alpha_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} (j\omega) + \alpha_m\} \dot{x} e^{j\omega t}] = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t})$$

por LEY 3

$$\underbrace{[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]}_{(*)} \dot{X} = \ddot{A}$$

Si $(*)$ ES DISTINTO DE CERO

$$\dot{X} = \frac{\ddot{A}}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}$$

LA MAGNITUD ES

$$X_m = \frac{A_m}{\underbrace{[a_0^2 - a_1 a_2 \omega^2 + \dots]^2}_{\text{POTENCIAS PARES DE } \omega} + \underbrace{[a_1 a_0 \omega - a_2 a_3 \omega^3 + \dots]^2}_{\text{POTENCIAS IMPARES DE } \omega}}^{1/2}$$

Y LA FASE ES

$$\psi = \phi - \tan^{-1} \frac{a_1 \omega - a_2 \omega^3 + \dots}{a_0 - a_1 \omega^2 + \dots}$$

NOTA: Si $(*)$ FUERA CERO A LA FRECUENCIA ω , QUIERE DECIR QUE $j\omega$ ES FRECUENCIA NATURAL Y LA SOLUCIÓN PARTICULAR ES DE LA FORMA $e^{j\omega t + \beta}$

EL DESARROLLO PRECIS SE PUEDE GENERALIZAR A UN CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE DESCRITO POR LA EC. DIF.

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + a_m y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_n w$$

DOnde $a_1, a_2, \dots, a_m$ y $b_0, b_1, \dots, b_n$ SON NÚMEROS REALES

$$W(t) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \phi), \quad \dot{A} = |A| e^{j\phi}$$

$$y(t) = \text{Re}(\dot{B} e^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \psi), \quad \dot{B} = |B| e^{j\psi}$$

LAS R-ÉSIMAS DERIVADAS DE $W(t)$ SE REEMPLAZAN POR

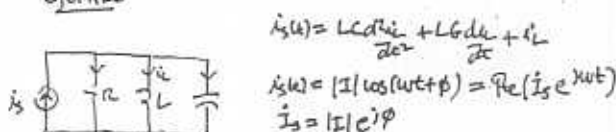
$$(j\omega)^R \dot{A}, \quad R=0, \dots, m$$

LAS k-ÉSIMAS DERIVADAS DE $y(t)$ SE REEMPLAZAN POR

$$(j\omega)^k \dot{B}, \quad k=0, \dots, m$$

$$\Rightarrow [(j\omega)^m + a_1(j\omega)^{m-1} + \dots + a_m] \dot{B} = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] \dot{A}$$

EJEMPLO



$$i_s(t) = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$i_s(t) = |I| \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

$$I_s = |I| e^{j\phi}$$

$$\text{Sol particular } i_{Lp} = \text{Re}(I_L e^{j\omega t}) = |I_L| \cos(\omega t + \psi)$$

LA RELACIÓN ENTRE EL FASEO DE ENTRADA Y DE SALIDA ES

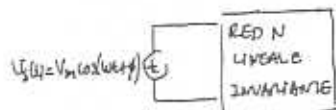
$$[LC(j\omega)^2 + LG(j\omega) + 1] \dot{I}_L = \dot{I}_s$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{I}_s}{[LC(j\omega)^2 + LG(j\omega) + 1]}$$

$$|I_L| = \frac{|I_s|}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega LG)^2]^{1/2}}$$

$$\psi = \phi - \tan^{-1} \frac{\omega LG}{1 - \omega^2 LC}$$

RESPUESTA COMPLETA Y RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL



LA RESPUESTA DE CUALQUIER VARIABLE DE RED "y" ES DE LA FORMA

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \forall t$$

DOnde

$$y_h(t) = \sum_i R_i e^{s_i t}$$

Si TODAS LAS FRECUENCIAS NATURALES SON DISTINTAS, ESTAS R_i DEPENDEN DE LOS ESTADOS INICIALES, SE DETERMINAN POR MÉTODOS FACTORIALES.

$$y_p(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$$

RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

- ① Si TODAS LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LA RED ESTÁN EN EL SEMIPLANO IZQUIERDO ABIERTO, ENTONCES ESTA SE DICE ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0 \quad \text{INDEPENDIENTE DEL ESTADO INICIAL}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_p(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$$

A ESTA RESPUESTA SINUSOIDAL SE DENOMINA RESPUESTA PERMANENTE SINUSOIDAL (R.P.S.)

- ② Si UNA O MÁS DE SUS FRECUENCIAS NATURALES ESTÁN EN EL SEMIPLANO DERECHO ABIERTO (DEL PLANO DE LA FRECUENCIA COMPLEJA), EL CIRCUITO ES INESTABLE

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) \rightarrow \infty \quad \text{EN GENERAL}$$

- ③ PARA FRECUENCIAS NATURALES IMAGINARIAS PARES

i) PARES SIMPLES

SOLO SI $j\omega$ NO ES UNA FRECUENCIA NATURAL EXISTENTE RÉGIMEN PERMANENTE AUNQUE NO SEA SINUSOIDAL

$$s^2 + \omega_0^2 \rightarrow s_1 = j\omega_0, s_2 = -j\omega_0$$

$$\text{Si } \omega \neq \omega_0$$

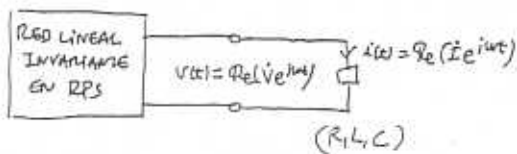
$$y_h(t) = k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} = K \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$y_p(t) = B \cos(\omega t + \psi)$$

Si $\omega = \omega_0$ RESPUESTA CONTIENE TÉRMINO $A t \cos(\omega_0 t + \phi)$ ES INESTABLE, NO EXISTE RÉGIMEN PERMANENTE.

ii) PARES MÚLTIPLES ES SIEMPRE INESTABLE, NO EXISTE RÉGIMEN PERMANENTE

RELACIONES FASORIALES PARA LOS ELEMENTOS DE CIRCUITO



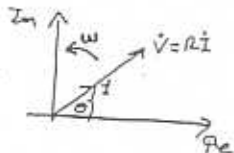
1) RESISTENCIA

$$v(t) = R i(t) \rightarrow \text{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} = R \text{Re}\{\hat{I}e^{j\omega t}\}$$

$$\hat{I} = G \hat{V} \quad \text{LEMA 1}$$

$$\hat{V} = R \hat{I} \quad \text{LEMA 3}$$

DIAGRAMA FASORIAL



$$\angle \hat{V} = \angle \hat{I} = 0$$

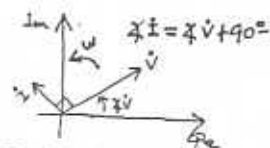
$\hat{V}$ e $\hat{I}$ SON COLINEALES

FASOR NOTA A FRECUENCIA ANGULAR ω , SU PROYECCIÓN SOBRE EL EJE REAL ES $x(t)$

2) CAPACITOR

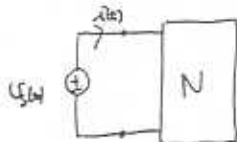
$$i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow \hat{I} = j\omega C \hat{V} \quad \text{LEMA 2}$$

$$v = \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \hat{V} = \frac{1}{j\omega C} \hat{I}$$



EL FASOR CORRIENTE ADELANTA AL FASOR VOLTAJE

ADMITANCIA



$$v_s(t) = \text{Re}\{\hat{V}_s e^{j\omega t}\} = |\hat{V}_s| \cos(\omega t + \angle \hat{V}_s)$$

$$i(t) = \text{Re}\{\hat{I} e^{j\omega t}\} = |\hat{I}| \cos(\omega t + \angle \hat{I})$$

SE DEFINE LA ADMITANCIA DE PUNTO PORTANTE DEL UNA PUERTA N, A LA FRECUENCIA ω , COMO LA RAZÓN DEL FASOR CORRIENTE DE SALIDA $\hat{I}$ Y EL FASOR VOLTAJE DE ENTRADA $\hat{V}_s$.

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{\hat{I}}{\hat{V}_s} \quad \left| Y(j\omega) \right| = \frac{|\hat{I}|}{|\hat{V}_s|}$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle \hat{I} - \angle \hat{V}_s$$

PARA EL MISMO CIRCUITO N SI $\hat{V}_s = \hat{V} \Rightarrow \hat{I}_s = \hat{I}$

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} \quad \left| Z(j\omega) \right| = \frac{1}{|Y(j\omega)|}$$

$$\angle Z(j\omega) = -\angle Y(j\omega)$$

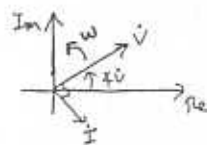
EN RESUMEN PARA LOS ELEMENTOS R, L, C SE TIENE QUE

	Z (IMPEDANCIA)	Y (ADMITANCIA)
RESISTENCIA	R	G
CAPACITOR	$1/j\omega C$	$j\omega C$
INDUCTANCIA	$j\omega L$	$1/j\omega L$

3) INDUCTANCIA

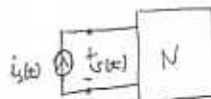
$$v = L \frac{di}{dt} \rightarrow \hat{V} = j\omega L \hat{I}$$

$$\hat{I} = \frac{1}{j\omega L} \hat{V}$$



$\angle \hat{I} = \angle \hat{V} - 90^\circ$
EL FASOR CORRIENTE ESTA 90° EN ATRASO CON RESPECTO AL FASOR VOLTAJE

IMPEDANCIA



N: UNA PUERTA LINEAL-INVARIANTE

$$i_s(t) = \text{Re}\{\hat{I}_s e^{j\omega t}\} = |\hat{I}_s| \cos(\omega t + \angle \hat{I}_s)$$

$$v(t) = \text{Re}\{\hat{V} e^{j\omega t}\} = |\hat{V}| \cos(\omega t + \angle \hat{V})$$

SE DEFINE IMPEDANCIA DE PUNTO PORTANTE DEL UNA PUERTA N A LA FRECUENCIA ANGULAR ω , COMO LA RAZÓN DEL FASOR VOLTAJE DE SALIDA $\hat{V}$ Y EL FASOR CORRIENTE DE ENTRADA $\hat{I}_s$

$$Z(j\omega) \triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{I}_s} \quad \left| Z(j\omega) \right| = \frac{|\hat{V}|}{|\hat{I}_s|}$$

$$\angle Z(j\omega) = \angle \hat{V} - \angle \hat{I}_s$$

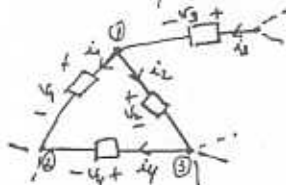
$$\hat{V} = Z(j\omega) \hat{I}_s \rightarrow v(t) = \text{Re}\{Z(j\omega) \hat{I}_s e^{j\omega t}\}$$

$$v(t) = |Z(j\omega)| |\hat{I}_s| \cos(\omega t + \angle Z(j\omega) + \angle \hat{I}_s)$$

FORMULACIÓN FASORIAL DE ECUACIONES DE CIRCUITO

UN CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE ESTÁ EN RPS A FRECUENCIA ω SI Y SOLO SI TODOS LOS VOLTAJES DE RAMA, CORRIENTES DE RAMA Y VOLTAJES NODALES SON SINUSOIDES DE FRECUENCIA ANGULAR ω . TODOS LOS VOLTAJES Y CORRIENTES SE PUEDEN DESCRIBIR POR FASORES.

EN RPS LAS ECUACIONES DE KIRCHHOFF SE PUEDEN ESCRIBIR DIRECTAMENTE EN TÉRMINOS DE VOLTAJES FASORIALES Y CORRIENTES FASORIALES



LCK EN NODO (1)

$$\hat{i}_1(t) + \hat{i}_2(t) - \hat{i}_3(t) = 0 \quad \forall t (*)$$

SEA $\hat{i}_k$ EL FASOR QUE REPRESENTA A LA SINUSOIDE $i_k(t)$, $k=1, 2, \dots, 6$ CON b EL NÚMERO DE RAMAS

$$\hat{i}_k(t) = \text{Re}\{\hat{i}_k e^{j\omega t}\}$$

REEMPLAZANDO EN (*)

$$\text{Re}\{\hat{i}_1 e^{j\omega t}\} + \text{Re}\{\hat{i}_2 e^{j\omega t}\} - \text{Re}\{\hat{i}_3 e^{j\omega t}\} = 0 \quad \forall t$$

LEMA 1 $\text{Re}\{(\hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{i}_3) e^{j\omega t}\} = 0$

LEMA 3 $\hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{i}_3 = 0$ LCK SE PUEDE PLANTEAR DIRECTAMENTE CON CORRIENTES FASORIALES

APLICANDO LKV EN EL BUCLE 1-2-3-1

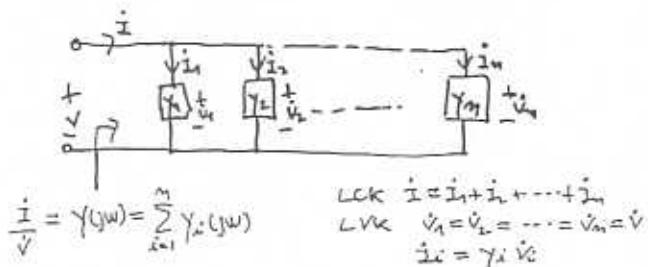
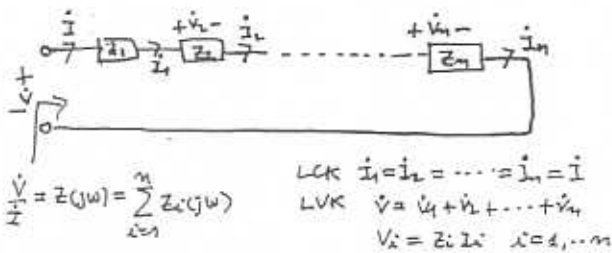
$$V_1(t) - V_2(t) - V_3(t) = 0 \quad \forall t$$

SEA $\hat{V}_k$ EL PASEO QUE REPRESENTA A LA SINUSOIDE $V_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, 6$.

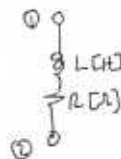
ENTONCES $\hat{V}_1 - \hat{V}_2 - \hat{V}_3 = 0$

CONEXIÓN SERIE-PARALELO EN RPS

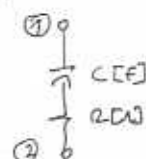
EN RPS A FRECUENCIA ω , CADA ELEMENTO ESTÁ CARACTERIZADO POR UNA IMPEDANCIA



EJEMPLOS:



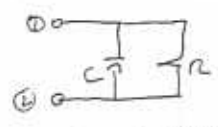
$$Z_{12} = R + j\omega L \quad [\Omega]$$



$$Z_{12} = R + \frac{1}{j\omega C} \quad [\Omega]$$

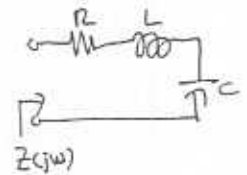
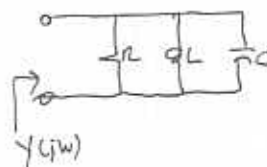


$$Y_{12} = G + \frac{1}{j\omega L} \quad [S]$$



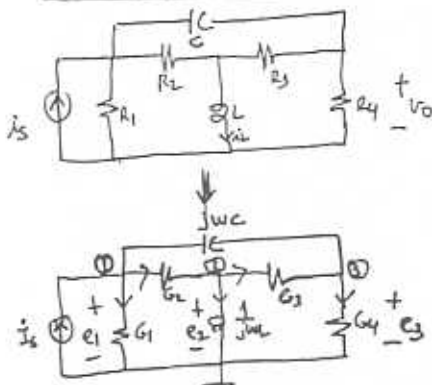
$$Y_{12} = G + j\omega C$$

PROPUESTOS:



NOTA: EXPRESAR EN LA FORMA $x + jy$

ANÁLISIS NODAL EN RPS



EN RPS USANDO ADMITANCIAS

$$\hat{I}_s(t) = A \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \hat{I}_s = A e^{j\phi}$$

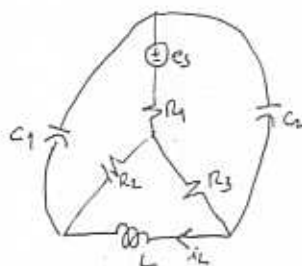
LCK ① $\hat{I}_s = G_1 \hat{E}_1 + G_2 (\hat{E}_1 - \hat{E}_2) + j\omega C (\hat{E}_1 - \hat{E}_3)$
 ② $0 = -G_2 (\hat{E}_1 - \hat{E}_2) + \frac{1}{j\omega L} \hat{E}_2 + G_3 (\hat{E}_2 - \hat{E}_3)$
 ③ $0 = -G_3 (\hat{E}_2 - \hat{E}_3) + G_4 \hat{E}_3 - j\omega C (\hat{E}_1 - \hat{E}_3)$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + j\omega C & -G_2 & -j\omega C \\ -G_2 & G_2 + G_3 + \frac{1}{j\omega L} & -G_3 \\ -j\omega C & -G_3 & G_3 + G_4 + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FUERA DE LA DIAGONAL:
 ① SUMA DE ADMITANCIAS ENTRE NODOS ① Y ②

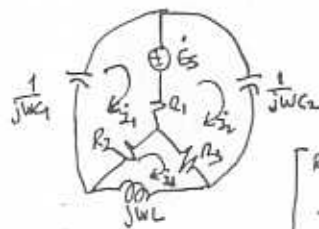
DIAGONAL: SUMA DE ADMITANCIAS EN NODO ①
 SUMA DE FUENTES DE CORRIENTE INGRESANDO AL NODO ①

ANÁLISIS REGIONAL EN RPS



DETERMINAR i_L EN RPS

$R_1 = 1 \Omega$
 $R_2 = 1 \Omega$
 $R_3 = 1 \Omega$
 $L = 1 H$
 $C_1 = 1 F$
 $C_2 = 4 F$
 $E_3 = \cos 2t$



EN RPS USANDO IMPEDANCIAS

FUERA DE LA DIAGONAL
 ① SUMA DE IMPEDANCIAS COMUNES A MALLAS ② Y ③

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_2 + R_3 + j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{E}_3 \\ \hat{E}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

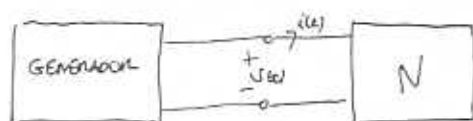
Por Cramer

$$\hat{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + \frac{1}{j2} & -1 & -1 \\ -1 & 2 + \frac{1}{j2} & 1 \\ -1 & -1 & 2 + j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + \frac{1}{j2} & -1 & -1 \\ -1 & 2 + \frac{1}{j2} & 1 \\ -1 & -1 & 2 + j2 \end{vmatrix}}$$

DIAGONAL: SUMA DE IMPEDANCIAS EN MALLA ②

SUMA DE FUENTES DE VOLTAGE CON SIGNO DE VOLTAGE EN LA DIRECCIÓN DE LA CORRIENTE

POTENCIA EN RPS



UNA RED LINEAL INVARIANTE

LA POTENCIA INSTANTÁNEA ENTREGADA AL UNA-PUERTA ES

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Y LA ENERGÍA ENTREGADA A N EN (t_0, t) ES

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(t') dt'$$

EN RPS

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_V) = \text{Re}(\hat{V} e^{j\omega t}) \text{ con } \hat{V} = V_m \angle \phi_V$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_I) = \text{Re}(\hat{I} e^{j\omega t}) \text{ con } \hat{I} = I_m \angle \phi_I$$

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_V) \cos(\omega t + \phi_I) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)}_{\text{TERMINO CONSTANTE}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I)}_{\text{SINUSOIDE DE FRECUENCIA 2W}} \end{aligned}$$

SE DEFINE POTENCIA MEDIA (PROMEDIO SOBRE UN PERÍODO $T = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t') dt' = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)$$

NOTA ① $\phi_V - \phi_I = \phi_Z$ YA QUE $\hat{V} = Z \hat{I}$

② SI N CONTIENE SOLO ELEMENTOS PASIVOS (R, L, C > 0) POR EL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$P \geq 0 \Rightarrow -90^\circ \leq \phi_V - \phi_I \leq 90^\circ \Rightarrow |\angle Z(j\omega)| \leq 90^\circ \forall \omega$$

PERO $p(t)$ PUEDE SER NEGATIVO SOBRE ALGUNOS INTERVALOS DE TIEMPO

SE DEFINE LA POTENCIA COMPLEJA ENTREGADA AL UNA-PUERTA

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}^* \\ &= \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| e^{j(\phi_V - \phi_I)} \\ &= \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| \cos(\phi_V - \phi_I) + j \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| \sin(\phi_V - \phi_I) \end{aligned}$$

$$P = \text{Re}(\hat{S}) = \text{Re}\left(\frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}^*\right) = \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| \cos(\phi_V - \phi_I) \quad [\text{W}]$$

POTENCIA ACTIVA O MEDIA

$$Q = \text{Im}(\hat{S}) = \text{Im}\left(\frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}^*\right) = \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| \sin(\phi_V - \phi_I) \quad [\text{VAR}]$$

POTENCIA REACTIVA

$$\hat{S} = P + jQ \quad [\text{VA}]$$

SEA $Z(j\omega)$ LA IMPEDANCIA DE PUNTO MOTRIZ DEL UNA-PUERTA A LA FRECUENCIA ω

$Y(j\omega)$ LA ADMITANCIA DE PUNTO MOTRIZ

RELACIÓN ENTRE POTENCIA COMPLEJA E IMPEDANCIA

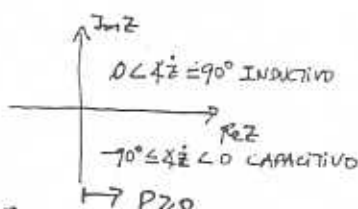
$$\hat{S} = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}^* = \frac{1}{2} Z |\hat{I}|^2 = \frac{1}{2} Y^* |\hat{V}|^2$$

$$P = \frac{1}{2} |\hat{I}|^2 \text{Re}(Z(j\omega)) = \frac{1}{2} |\hat{V}|^2 \text{Re}(Y(j\omega))$$

$$Q = \frac{1}{2} |\hat{I}|^2 \text{Im}(Z(j\omega)) = \frac{1}{2} |\hat{V}|^2 \text{Im}(Y(j\omega))$$

LUEGO $P \geq 0 \Leftrightarrow \text{Re}(Z(j\omega)) \geq 0 \forall \omega$

ESTO OCURRE SI
 $R, L, C \geq 0$
ELEMENTOS PASIVOS



ELEMENTOS

a) $\hat{V} = R \hat{I} \Rightarrow P = \frac{R |\hat{I}|^2}{2} = \frac{|\hat{V}|^2}{2R}$
 $Q = 0$ YA QUE $\phi_V = \phi_I$

b) $\hat{V} = j\omega L \hat{I} \Rightarrow \phi_V - \phi_I = 90^\circ$
 $P = \frac{|\hat{V}| |\hat{I}|}{2} \cos 90^\circ = 0$; $Q = \frac{|\hat{V}| |\hat{I}|}{2} \sin 90^\circ = \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| > 0$
 $Q = \omega L \frac{|\hat{I}|^2}{2} = X_L \frac{|\hat{I}|^2}{2}$

c) $\hat{V} = \frac{1}{j\omega C} \hat{I} \Rightarrow \phi_V - \phi_I = -90^\circ$
 $P = 0$; $Q = \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| \sin(-90^\circ) = -\frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| < 0$
 $= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega C}\right) |\hat{I}|^2 = -X_C \frac{|\hat{I}|^2}{2}$

VALOR EFECTIVO O VALOR CUADRÁTICO MEDIO (RMS: ROOT MEAN SQUARE)

PARA UNA RESISTENCIA EN RPS

$$p(t) = v(t)i(t) = R i^2(t) = R I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T R I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = R I_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt$$

NOTA: $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} V_m I_m$$

SE DEFINE VALOR EFECTIVO DE UNA ONDA SINUSOIDAL

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad , \quad V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$\text{DE MODO QUE } P = R I_{ef}^2 = V_{ef} I_{ef}$$

POR ANALOGÍA CON EL CASO CONTINUO.

EJEMPLO: LA LÍNEA DOMÉSTICA ES DE 220 VILTS EFECTIVOS LUEGO SU AMPLITUD ES $220\sqrt{2}$

PARA UNA ONDA PERIÓDICA NO-SINUSOIDAL DE PERÍODO T

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = R I_{ef}^2$$

LA POTENCIA MEDIA ENTREGADA POR UNA ONDA PERIÓDICA A UNA RESISTENCIA R ES

$$P = R I_{ef}^2 = \frac{V_{ef}^2}{R} = V_{ef} I_{ef}$$

AL USAR VALORES EFECTIVOS DE CORRIENTES Y VOLTAJES SE TIENE QUE

$$\dot{S} = \dot{V}_{ef} \dot{I}_{ef}^*$$

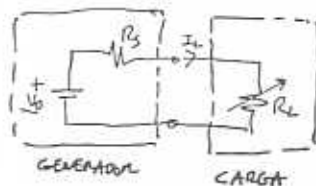
$$|S| = V_{ef} I_{ef} \quad [VA] \quad \text{POTENCIA APARENTE}$$

$$P = |S| \cos \phi \quad [W] \quad Q = |S| \sin \phi \quad [VAR] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} Q = P \tan \phi$$

$$\dot{S} = P + jQ = |S| \angle \phi$$

$$\text{con } \phi = \angle \dot{V} - \angle \dot{I}$$

TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA



$$P_L = R_L I_L^2$$

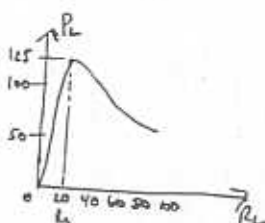
$$I_L = \frac{V_0}{R_3 + R_L}$$

$$P_L = \left(\frac{V_0}{R_3 + R_L} \right)^2 R_L = \frac{V_0^2 R_L}{(R_3 + R_L)^2}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{V_0^2 [R_L(-2)(R_3 + R_L) + (R_3 + R_L)^2]}{(R_3 + R_L)^4}$$

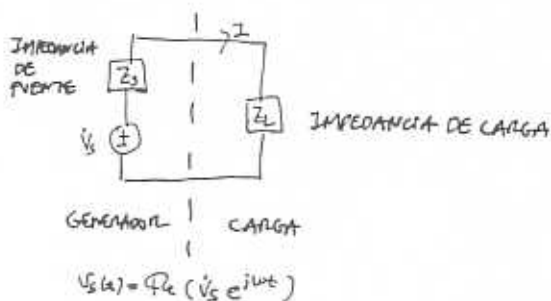
$$= \frac{V_0^2 [-2R_L + R_L + R_3]}{(R_3 + R_L)^3} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_3}$$

Si $V_0 = 100V$
 $R_3 = 20\Omega$
 $R_L = 0 \text{ a } 100\Omega$



LA MÁXIMA POTENCIA ENTREGADA OCURRE CUANDO LA RESISTENCIA DE LA CARGA ES IGUAL A LA RESISTENCIA DE LA FUENTE

T. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA EN RPS (ACTIVA)



SE DEBE SELECCIONAR Z_L TAL QUE LA POTENCIA MEDIA ENTREGADA POR EL CIRCUITO A LA CARGA EN RPS SEA MÁXIMA.

TEOREMA: LA IMPEDANCIA DE CARGA ÓPTIMA ES

$$\boxed{Z_L = Z_3^*}$$

DEM: $\dot{I} = \frac{\dot{V}_0}{Z_3 + Z_L}$

$$P = \frac{1}{2} |\dot{I}|^2 R_L = \frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_0|^2}{|Z_3 + Z_L|^2} R_L$$

SEA $Z_3 = R_3 + jX_3$
 $Z_L = R_L + jX_L$

$$P = \frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_0|^2 R_L}{(R_L + R_3)^2 + (X_L + X_3)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{\partial}{\partial X_L} \left[\frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_0|^2 R_L}{(R_L + R_3)^2 + (X_L + X_3)^2} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_3}$$

$$\therefore P = \frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_0|^2 R_L}{(R_L + R_3)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_3} \quad \text{DEDUCIDO ANTERIORMENTE}$$

$$\therefore Z_{L \text{ óptimo}} = Z_3^* = R_3 - jX_3$$

$$\max P = \frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_0|^2 R_L}{(R_L + R_3)^2} \bigg|_{R_L = R_3} = \frac{1}{8} \frac{|\dot{V}_0|^2}{R_3} \quad \text{EN LA CARGA}$$

LA POTENCIA MEDIA ENTREGADA POR LA FUENTE ES

$$P_S = \frac{1}{2} |\dot{I}|^2 (R_3 + R_L) = \frac{1}{2} \frac{|\dot{V}_0|^2}{|Z_3 + Z_L|^2} (R_3 + R_L)$$

$$I = \frac{V_0}{Z_3 + Z_L}$$

$$Z_L = Z_3^*$$

$$\Rightarrow P_S = \frac{1}{4} \frac{|\dot{V}_0|^2}{R_3}$$

$$\text{EFICIENCIA} = \frac{P}{P_S} = \frac{1}{2} \quad (50\%)$$

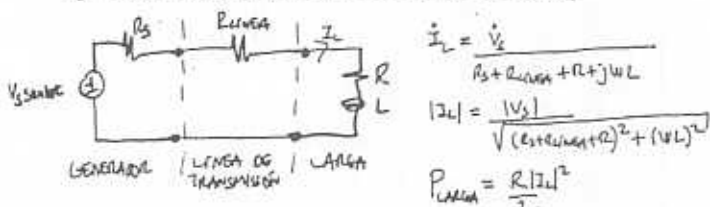
SE DEFINE FACTOR DE POTENCIA COMO

$$F.P. = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{V_{ef} I_{ef}} = \frac{V_{ef} I_{ef} \cos(\angle V - \angle I)}{V_{ef} I_{ef}}$$

$$F.P. = \cos(\angle V - \angle I) = \cos \phi$$

DA UNA MEDIDA DE LA HABILIDAD DEL ELEMENTO PARA ABSORBER POTENCIA. PARA UNA RESISTENCIA F.P. = 1 EN CAMBIO PARA INDUCTANCIAS Y CONDENSADORES F.P. = 0.

EJ. DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA EN CARGA INDUCTIVA



$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_0}{R_3 + R_{línea} + R + j\omega L}$$

$$|I_L| = \frac{|\dot{V}_0|}{\sqrt{(R_3 + R_{línea} + R)^2 + (\omega L)^2}}$$

$$P_{carga} = R |I_L|^2$$

$\therefore |I_L| \uparrow$ AUMENTAN PERDIDAS EN LÍNEAS $\frac{1}{2} |I_L|^2 R_{línea}$ Y EN EL GENERADOR $\frac{1}{2} |I_L|^2 R_3$

MODULACIÓN

SE REFIERE A SEÑALES DE BAJA FRECUENCIA (NORMALMENTE AUDIO) QUE CONTROLAN LA AMPLITUD, FRECUENCIA O FASE DE UNA SEÑAL DE ALTA FRECUENCIA (NORMALMENTE RADIOFRECUENCIA)

A LA SEÑAL DE ALTA FRECUENCIA SE LE LLAMA PORTADORA Y A LA SEÑAL DE BAJA FRECUENCIA MODULADORA

LA SEÑAL MODULADORA PUEDE SER LA VOZ O LA MÚSICA QUE ESTÁ SIENDO TRANSMITIDA

LA PORTADORA ES NECESARIA SOLO PARA CONSEGUIR QUE LA SEÑAL MODULADA SEA TRANSMITIDA O RECIBIDA.

MODULACIÓN DE AMPLITUD (AM)

CUANDO UNA SEÑAL DE BAJA FRECUENCIA CONTROLA LA AMPLITUD DE LA PORTADORA.

UNA VEZ QUE LA SEÑAL AM ES RECIBIDA, LA PORTADORA YA NO ES NECESARIA. EN EL RECEPTOR HAY UN CIRCUITO ESPECIAL QUE SEPARA LA SEÑAL MODULADA DE LA PORTADORA. A ESTE CIRCUITO SE LE LLAMA DEMODULADOR

MODULACIÓN AM

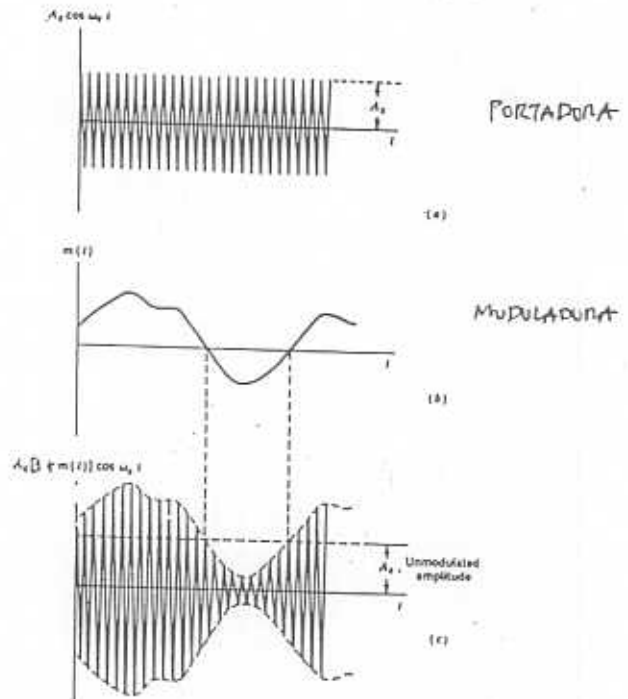
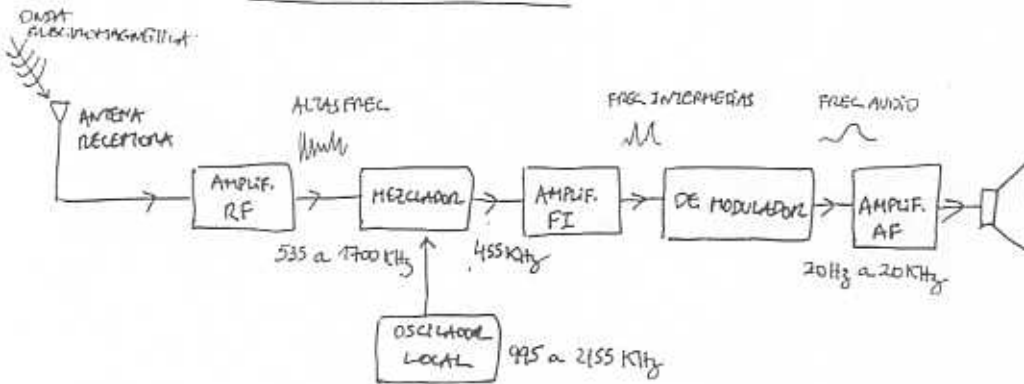


Figure 1.4-1 (a) A sinusoidal carrier, (b) A modulating waveform, (c) The sinusoidal carrier in (a) modulated by the waveform in (b).

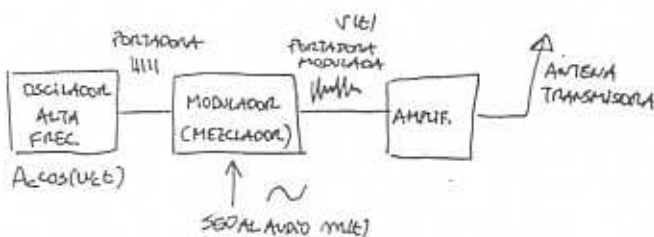
RECEPTOR DE RADIO AM



DE MODULADOR: ES DETECTOR DE ENVOLVENTE, HAY QUE RECTIFICAR Y ELIMINAR LA COMPONENTE DE FI.

DE MODULACIÓN

TRANSMISOR RADIO AM



$$V(t) = A_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t$$

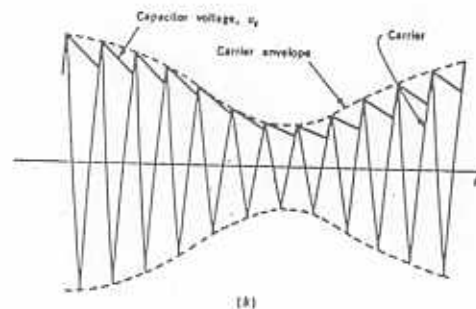
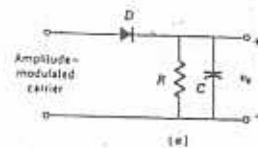
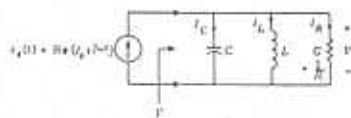
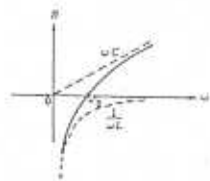


Figure 3.2-1 (a) A demodulator for an AM signal, (b) Input waveform and output voltage v_o across capacitor

CIRCUITOS RESONANTES



$$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

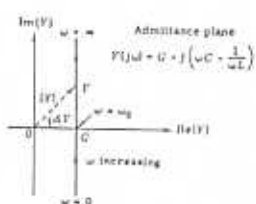


A LA FRECUENCIA $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

SE TIENE $B(\omega_0) = 0$.
SE DICE QUE EL CIRCUITO ESTÁ
EN RESONANCIA A LA FRECUENCIA
DE RESONANCIA $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ [Hz]

$$\text{Re}\{Y(j\omega)\} = G$$

$$\text{Im}\{Y(j\omega)\} = B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

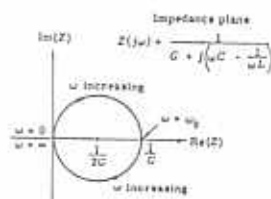


EN RESONANCIA LA
ADMITANCIA ES MÍNIMA Y
LA FASE ES CERO.
LA COMBINACIÓN DE L Y C
SE COMPORTA COMO UN
CIRCUITO ABIERTO

EN EL PLANO DE LA IMPEDANCIA

$$Z(j\omega) = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)} - j\frac{B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)}$$

$|Z(j\omega)|$ COMIENZA EN 0 PARA $\omega = 0$, LUEGO AUMENTA
HASTA ALCANZAR UN MÁXIMO EN $\omega = \omega_0$. PARA $\omega > \omega_0$
DECRECE Y TIENDE A CERO CUANDO $\omega \rightarrow \infty$



FUNCIÓN DE RED, RESPUESTA DE FRECUENCIA

$$H(j\omega) = \frac{I_L}{I_s} = \frac{G V}{I_s} = G Z(j\omega) = \frac{1}{1 + j2Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j2Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{DONDE } Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 C R$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

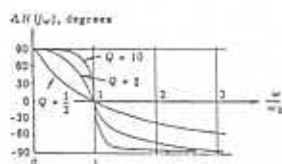
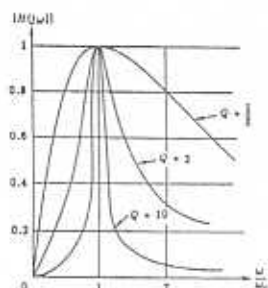


Fig. 6-7 Frequency response of resonant circuits.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \angle H(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$i_n = H(j\omega) i_s \rightarrow i_n(t) = |H(j\omega)| |i_s| \cos(\omega t + \phi_s + \angle H(j\omega))$$

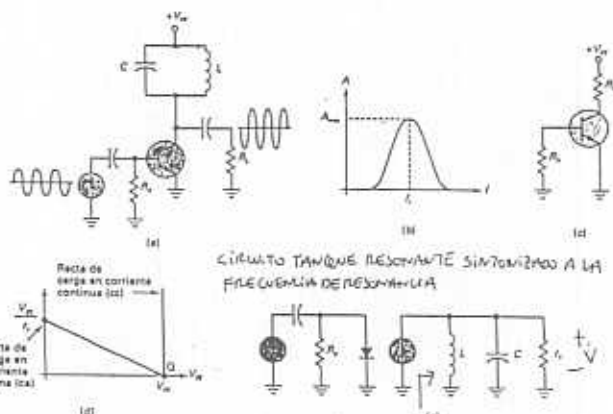


Figura 24-1. a) Amplificador de clase C saturado. b) Respuesta en frecuencia. c) Circuito equivalente de corriente continua. d) Rectas de carga. e) Circuito equivalente de corriente alterna para Q mayores de 10.

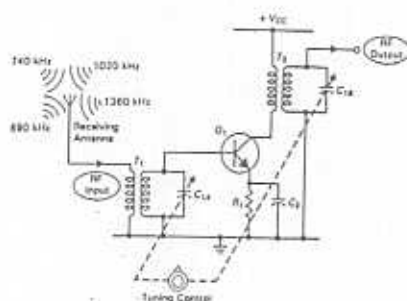
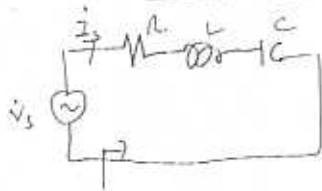


FIGURE 23-14 Typical RF Tuned Amplifier.

CUANDO EL
CIRCUITO ESTÁ
SINTONIZADO A
LA FRECUENCIA
DE RESONANCIA
 $Z = Z_{max}$
Y LA TENSIÓN EN
LA CARGA PRESENTA
UN VALOR MÁXIMO
 $V = Z_{max} I$

RLC SERIE



(1) $Z = R + j(\omega L - X_C)$

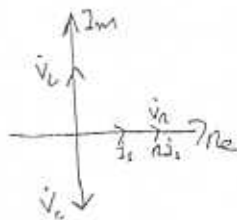
$\text{Im}(Z) = 0 \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s}$

$Z_{\min} = R \Rightarrow Y_{\max} = \frac{1}{R} \Rightarrow i_s = \frac{v_s}{R} \text{ MÁXIMA}$

(2) $\dot{V}_L + \dot{V}_C = 0$

Y A QUE $V_L = jX_L i_s$ $\left\{ \begin{array}{l} V_L + V_C = 0 \\ V_R = Ri_s = v_s \end{array} \right.$

(3)



$Q = \frac{|\dot{V}_L|}{|\dot{V}_s|} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}$

$Q = \frac{|\dot{V}_C|}{|\dot{V}_s|} = \frac{X_C}{R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}$

$\left. \begin{array}{l} Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \\ \alpha = \frac{R}{2L} \end{array} \right\}$

Si $R < X_L, X_C$ SE TIENE $Q > 1$

EN CIRCUITO RESONANTE SERIE Q INDICA LA CANTIDAD DEL CIRCUITO RESONANTE O LA RAZÓN DE LA REACTANCIA A LA RESISTENCIA

RLC PARALELO

EN RESONANCIA SE DAN TRES CARACTERÍSTICAS:

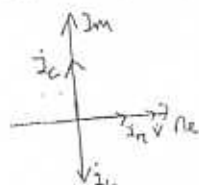
(1) $\text{Im}(Y) = 0 \Rightarrow Y = G$ ES MÍNIMA $\Rightarrow Z$ ES MÁXIMA
 Y, Z PURAMENTE RESISTIVAS $\left\{ \begin{array}{l} V = Zi_s \text{ ES MÁXIMA} \end{array} \right.$

(2) $i_C + i_L = 0$

Y A QUE $i_C = j\omega_0 C \dot{V} = j \frac{\omega_0}{\omega_0} C \dot{V} = j \frac{1}{\omega_0 L} \dot{V} = -i_L$
 $i_L = \frac{1}{j\omega_0 L} \dot{V}$
 $i_s = i_n = \frac{V}{R}$

(3) $Q = \frac{|i_L|}{|i_s|} = \omega_0 C R$ $\left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{2RC} \end{array} \right.$
 $Q = \frac{|i_L|}{|i_s|} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 C R$

Q ES EL FACTOR DE CALIDAD DEL CIRCUITO RESONANTE



EN RESONANCIA i_n PUEDE SER 1A MIENTRAS QUE $|i_L| = |i_C| = 500 \text{ A}$

Q ES UNA MEDIDA DE LA DISCRIMINACIÓN EN FRECUENCIA DEL FILTRO.

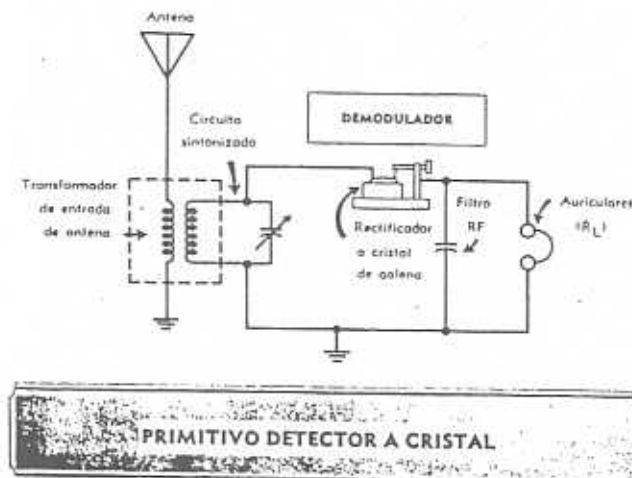
Receptor de Radio a Galena

El receptor de radio AM más básico es el de galena. Un cristal de galena actúa como un diodo. El receptor consiste de un circuito sintonizado, el cristal, un condensador y un auricular. Ver figura 1.

Las señales de radio se transmiten en forma de energía electromagnética, que induce un voltaje en cualquier conductor que las intercepte. Una antena es un conductor especialmente diseñado para interceptar esta energía electromagnética. En la radio a galena basta un alambre suficientemente largo para interceptar la máxima cantidad de señal.

La antena se acopla por medio de un transformador de antena. Por inducción mutua la corriente que fluye por el primario induce una similar en el secundario. El secundario es un circuito resonante paralelo en el que se tiene máximo voltaje a la frecuencia de resonancia. El capacitor del circuito sintonizado es variable, de modo que éste y la inductancia puedan sintonizarse sobre la banda de frecuencias AM (535 a 1705 kHz). El cristal de galena rectifica la señal (demodula la señal de audio de la portadora AM) y el otro condensador actúa como un filtro de RF.

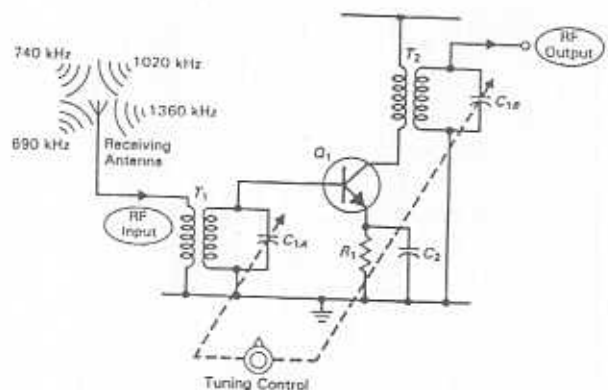
La radio a galena al tener solo un circuito sintonizado tiene poca selectividad (habilidad para separar dos estaciones cuyas portadoras están a 10 kHz). Además, al no tener amplificadores tiene poca sensibilidad (es una medida de cuán fuerte debe ser la señal recibida en la antena para que la radio la reciba apropiadamente).



Amplificador de RF sintonizado

Emplea un filtro LC a la entrada y salida para filtrar o seleccionar la frecuencia deseada (estación). El primario del transformador T_1 se conecta a la antena mientras que el secundario forma un circuito LC sintonizado con C_{1A} .

El primario de T_2 es la carga para el transistor amplificador Q_1 , mientras que su secundario forma el circuito de salida sintonizado LC paralelo con C_{1B} . Los capacitores C_{1A} y C_{1B} están mecánicamente interconectados, de modo que ambos circuitos se sintonicen a la misma frecuencia.



42-B

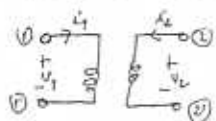
ELEMENTOS ACOPLADOS Y CIRCUITOS ACOPLADOS

HASTA AHORA HEBOS ESTUDIADO ELEMENTOS DE 2-TERMINALES:

ELEMENTOS ACOPLADOS: TIENEN MÁS DE UNA RAMA.
LOS VOLTAJES Y CORRIENTES DE UNA RAMA ESTÁN RELACIONADOS CON LOS DE LAS OTRAS RAMAS

- INDUCTANCIAS ACOPLADAS
- TRANSFORMADORES IDEALES
- FUENTES DEPENDIENTES

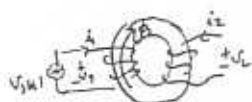
INDUCTANCIAS ACOPLADAS LINEALES E INVARIANTES



DOS BOBINAS DE ALAMBRE CERCANAS FÍSICAMENTE, O EN UN NÚCLEO COMÚN DE MATERIAL FERROMAGNÉTICO

SE ADOPTAN DIRECCIONES DE REFERENCIA ASOCIADAS

$$p(t) = v_1(i_1) + v_2(i_2) \quad \text{POTENCIA INSTANTÁNEA ENTREGADA POR EL EXTERIOR A LAS INDUCTANCIAS}$$



$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \phi_1(t)$
AUN SI $i_2 = 0$, HABRÁ UN VOLTAJE INDUCIDO $v_2 \neq 0$ SIEMPRE QUE $\phi_1(t)$ SEA VARIABLE

$$\phi_2 = M i_1, \quad v_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

CARACTERIZACIÓN ϕ -i

$$\phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \quad (1)$$

$$\phi_2(t) = M_{21} i_1(t) + L_2 i_2(t) \quad (2)$$

$L_1, L_2 [H]$: AUTO-INDUCTANCIAS $L_1, L_2 > 0$

$M_{12} = M_{21} = M [H]$: INDUCTANCIA MUTUA
(PUEDE SER POSITIVA O NEGATIVA DEPENDIENDO DE LA DISPOSICIÓN RELATIVA DE LAS BOBINAS)
DE CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS, MÚLTIPLO DEL CAMPO MAGNÉTICO

DE LA LEY DE FARADAY

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

EN RPS

$$\dot{v}_1 = j\omega L_1 \dot{i}_1 + j\omega M \dot{i}_2$$

$$\dot{v}_2 = j\omega M \dot{i}_1 + j\omega L_2 \dot{i}_2$$

EN NOTACIÓN MATRICIAL

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{MATRIZ DE INDUCTANCIAS}$$

$$\vec{\phi} = \mathbf{L} \vec{i}$$

$$\vec{v} = \mathbf{L} \frac{d\vec{i}}{dt}$$

$$\vec{V} = j\omega \mathbf{L} \vec{I}$$

PARA EL ANÁLISIS MODAL CONVIENE TOMAR EL RECÍPROCO DE LA MATRIZ DE INDUCTANCIAS

$$\vec{\phi} = \mathbf{L} \vec{i} \rightarrow \vec{i} = \mathbf{F} \vec{\phi}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{L}^{-1}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\det \mathbf{L}} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \quad r_{11} = \frac{L_2}{\det \mathbf{L}}, \quad r_{12} = \frac{-M}{\det \mathbf{L}}$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{-M}{\det \mathbf{L}} \quad (LO SI M > 0)$$

$$i_1 = r_{11} \int_0^t v_1 dt' + r_{12} \int_0^t v_2 dt' + i_1(0)$$

$$i_2 = r_{21} \int_0^t v_1 dt' + r_{22} \int_0^t v_2 dt' + i_2(0)$$

EN RPS

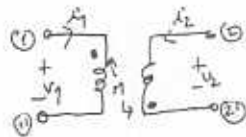
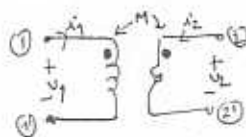
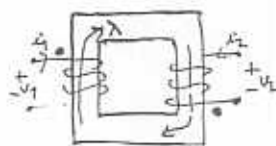
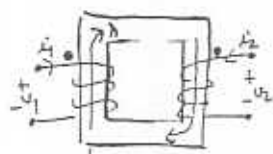
$$\dot{i}_1 = (r_{11}/j\omega) \dot{v}_1 + (r_{12}/j\omega) \dot{v}_2$$

$$\dot{i}_2 = (r_{21}/j\omega) \dot{v}_1 + (r_{22}/j\omega) \dot{v}_2$$

MARCAS DE POLARIDAD

SIRVEN PARA INDICAR LA POSICIÓN RELATIVA DE DOS ENROLLADOS ENTRE LOS CUALES EXISTE ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

- 1) ASIGNAR DIRECCIONES DE REFERENCIA ASOCIADAS
- 2) SELECCIONAR UN ENROLLADO Y MARCAR UN PUNTO EN EL TERMINAL DONDE LA CORRIENTE ENTRA A LA BOBINA
- 3) DETERMINAR LA DIRECCIÓN DEL FLUJO CREADO POR ELLA CORRIENTE, APLICANDO LA REGLA DE LA MANO DERECHA
- 4) LA MARCA DE POLARIDAD EN EL SEGUNDO ENROLLADO SE PONE DE TAL MANERA QUE UNA CORRIENTE POSITIVA QUE ENTRE POR LA MARCA PRODUZCA UN FLUJO EN LA MISMA DIRECCIÓN



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

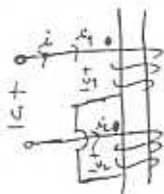
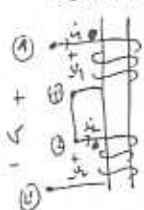
CONVENCIÓN PARA EL SIGNO DE M

SI AMBAS CORRIENTES (> 0) ENTRAN O SALEN POR LAS MARCAS DE POLARIDAD, EL SIGNO DEL VOLTAJE MUTUO ES IGUAL AL DEL VOLTAJE PROPIO
 $\Rightarrow$ FLUJOS MUTUOS Y PROPIOS SE REFUERZAN

EN CASO CONTRARIO SI UNA CORRIENTE ENTRA POR LA MARCA Y LA OTRA SALE, EL SIGNO DEL VOLTAJE MUTUO ES OPUESTO AL DEL VOLTAJE PROPIO (FLUJOS MUTUOS Y PROPIOS SE OPONEN)

CONEXIÓN SERIE Y PARALELA

CONEXIÓN SERIE



LCK $i_1 = i_2 = i$

LVK $u = u_1 + u_2 = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt}$

LCK $i = i_1 = -i_2$

LVK $u = u_1 - u_2$

$\Rightarrow \phi = \phi_1 + \phi_2$ sup. $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ $\phi = \phi_1 - \phi_2$

$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = (L_1 + M) i$

$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = (L_2 + M) i$

$\phi_1 = L_1 i_1 - M i_2 = (L_1 - M) i$

$\phi_2 = -M i_1 + L_2 i_2 = -(L_2 - M) i$

$\phi = \phi_1 + \phi_2 = (L_1 + L_2 + 2|M|) i$

$\phi = \phi_1 - \phi_2 = (L_1 + L_2 - 2|M|) i$

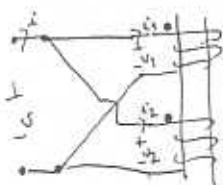
Leg

A INDUCTANCIAS LA CONEXIÓN SERIE ES

$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2|M|$

si los flujos se suman
si los flujos se oponen

CONEXIÓN PARALELA



LVK $u_1 = u_2 \Rightarrow \phi = \phi_1 = \phi_2 \forall t$
si $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$

LCK $i = i_1 + i_2$

$i = (L_1 + L_2 \pm 2|M|) \phi$

$F = L$ MATRIZ DE INDUCTANCIAS RECÍPROCAS

FLUJOS OPUESTOS

FLUJOS MISMA DIRECCIÓN

ENERGÍA ALMACENADA EN EL CIRCUITO

$$W[L_1, L_2, M] = \int_0^t p(t') dt' = \int_0^t [u_1(t') i_1(t') + u_2(t') i_2(t')] dt'$$

$$= \int_0^t [L_1 i_1 \frac{di_1}{dt'} + M (i_1 \frac{di_2}{dt'} + i_2 \frac{di_1}{dt'}) + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt'}] dt'$$

$$W(L_1, L_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \quad (3)$$

SUPONEMOS QUE $i_1(0) = i_2(0) = 0 \Rightarrow \phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$
NO HAY ENERGÍA ALMACENADA EN $t=0$.

$W(L_1, L_2) = W(i_1, 0) + M i_1 i_2 + W(0, i_2)$

si $i_1, i_2 > 0$ y $M > 0$, LA ENERGÍA TOTAL ALMACENADA SERÁ MAYOR QUE LA SUMA DE LA ENERGÍA ALMACENADA CUANDO i_1 E i_2 ACTÚAN AISLADAMENTE.

REESCRIBIENDO (3)

$W(L_1, L_2) = \frac{1}{2} L_1 (i_1 + \frac{M}{L_1} i_2)^2 + \frac{1}{2} (L_2 - \frac{M^2}{L_1}) i_2^2$

ES ≥ 0
 $\forall i_1, i_2$

PODE SER > 0
YA QUE LA ENERGÍA ALMACENADA NO PUEDE SER NEGATIVA $\forall i_1, i_2$

$\Rightarrow |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$

SE DEFINE COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO k

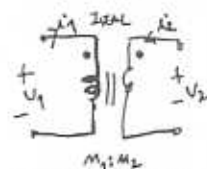
$0 \leq k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$

si $k=1$, $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ACOPLAMIENTO PERFECTO

TODO EL FLUJO MAGNÉTICO ES COMÚN A AMBAS INDUCTANCIAS

TRANSFORMADOR IDEAL

ELEMENTO DE 2-PUERTAS



① ACOPLAMIENTO PERFECTO, NO HAY PÉRDIDA DE FLUJO

$\phi_1 = m_1 \phi$ FLUJO EN EL NÚCLEO POR VUELTA
 $\phi_2 = m_2 \phi$

PRIMARIO SECUNDARIO $i_1 \frac{u_1}{u_2} = m_1 \frac{d\phi}{dt} = \frac{m_1}{m_2} \frac{u_2}{m_2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{m_1}{m_2}$

$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{m_1}{m_2} \quad \forall t \quad (4)$

TRANSFORMADORES PUEDE TEN SUBIR Y/O BAJAR VOLTAJES Y/O CORRIENTES ALTERNAS

$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{m_2}{m_1} \quad \forall t \quad (5)$

② AUTO-INDUCTANCIAS SON ∞

$\mu \rightarrow \infty$, EN CIRCUITO ABIERTO SI $i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = 0 \forall u_1$

(LA CARACTERÍSTICA i_2 DEPENDE DE L_1 SOLAMENTE NO DE u_1)

ER. VIENE DE

$m_1 i_1 + m_2 i_2 = R \phi = 0 \quad (\mu \rightarrow \infty \Rightarrow R=0)$

$\rightarrow$ Reluctancia

③ TRAF. IDEAL ES ELEMENTO SIN PÉRDIDAS NI ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA

$u_1(t) i_1(t) + u_2(t) i_2(t) = 0$

$W(L_1, L_2) = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 \sqrt{L_1 L_2} i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$
 $= \frac{1}{2} (\sqrt{L_1} i_1 + \sqrt{L_2} i_2)^2 = 0$

WEGO $\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{m_2}{m_1}$

$L_1 = \mu \frac{m_1^2 A}{l}$

$\mu \rightarrow \infty \Rightarrow L_1 \rightarrow \infty$
IGUAL PARA L_2

$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad \frac{L_1}{L_2} \geq \frac{L_2}{L_1}$ SON FINITAS

NOTA: SI SE CAMBIAN LAS PULSAS DE ALIMENTACIÓN

$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{m_1}{m_2}, \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{m_2}{m_1}$

PROPIEDAD DE CAMBIO DE IMPEDANCIAS (TRANSFORMADORES PUEDEN ADAPTAR IMPEDANCIAS)

EN RPS



$\vec{z}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\vec{i}_1} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \frac{\vec{u}_2}{-\left(\frac{m_2}{m_1} \right) \vec{i}_2}$

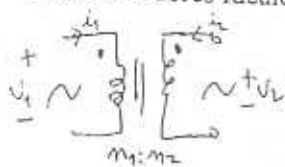
$\vec{z}_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \left(\frac{\vec{u}_2}{-\vec{i}_2} \right) = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \vec{z}_L$

$\boxed{\vec{z}_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \vec{z}_L}$

$P_1 = |\vec{i}_1|^2 \text{Re}(\vec{z}_1) = |\vec{i}_1|^2 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \text{Re}(\vec{z}_L) = |\vec{i}_1|^2 \text{Re}(\vec{z}_L) = P_2$

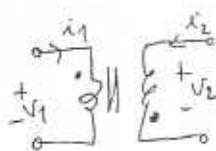
$\rightarrow \vec{z}_1$ IMPEDANCIA REFLEJADA O IMPEDANCIA DEL CIRCUITO SECUNDARIO REFERIDA AL PRIMARIO. SÓLO LA MAGNITUD DE $\vec{z}_L$ ES AFECTADA, EL ÁNGULO DE FASE NO SE ALTERA.

Transformadores Ideales



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$



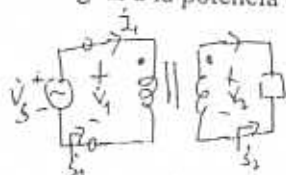
$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

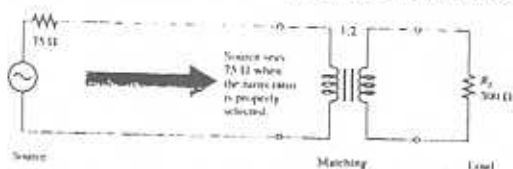
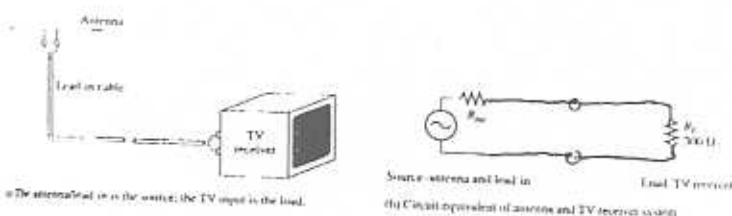
Un transformador ideal no disipa potencia ni almacena energia, ya que

$$p_{en}(t) = v_1 i_1 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) v_2 \left(-\frac{n_2}{n_1}\right) i_2 = v_2 (-i_2) = p_{sal}(t), \forall t$$

Lo anterior en RPS significa que la potencia compleja de entrada es igual a la potencia compleja de salida



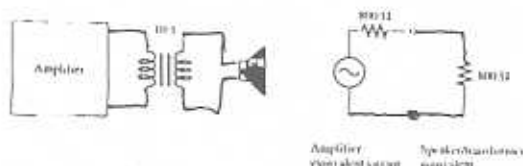
$$S_1 = \frac{1}{2} v_1 I_1^* = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right) v_2 \left(-\frac{n_2}{n_1}\right) I_2^* = -\frac{1}{2} v_2 I_2^* = S_2$$



Para MTP se requiere que la impedancia reflejada sea de 75 Ohms,

$$R_i = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L \Rightarrow 75 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 300 \Rightarrow \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$$

En otro problema se requiere adaptar la impedancia de un parlante de 8 Ohms a la impedancia de un amplificador de audio de 800 Ohms. Encontrar la razón de vueltas del transformador ideal para MTP.



Aplicaciones de transformadores

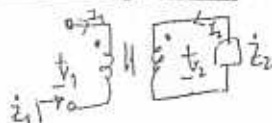
1. Subir/Bajar Voltaje
2. Adaptación de Impedancias
3. Aislación Eléctrica

Subir/Bajar Voltaje

Si $n_2 > n_1$ entonces $v_2 > v_1$ e $i_2 < i_1$, sube el voltaje

Si $n_1 > n_2$ entonces $v_1 > v_2$ e $i_1 < i_2$, baja el voltaje

Adaptación de Impedancias



A la impedancia vista desde el primario se le llama carga reflejada,

$$Z_1 = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) v_2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) (-i_2)} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_2$$

Tarea: Demuestre que este resultado es independiente de las marcas de polaridad.

La adaptación de impedancias se utiliza para alcanzar máxima transferencia de potencia (MTP). Por ejemplo, la impedancia característica de una antena es de 75 Ohms, mientras que la impedancia de entrada a un receptor de TV es de 300 Ohms, ambas fijas. ¿Cómo se puede lograr MTP?

Transformador como dispositivo de aislamiento

Existe aislamiento si no hay conexión eléctrica entre los enrollados primario y secundario.

Una aplicación es aislar el circuito secundario de cualquier voltaje constante (componente continua) presente en el primario.



FIGURE 14-22 Audio amplifier stages with transformer coupling for dc isolation.

Una segunda aplicación es aislar un equipo electrónico de una fuente de 220 V ac, 50 Hz.

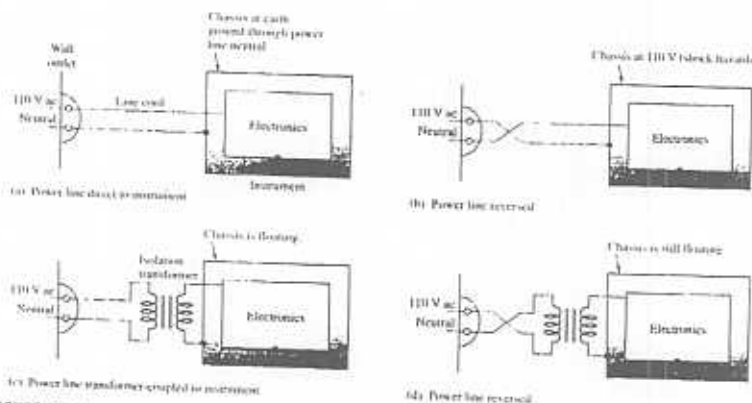
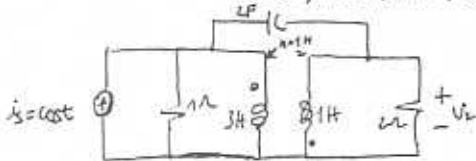


FIGURE 14-23 The use of an isolation transformer to reduce shock hazard.

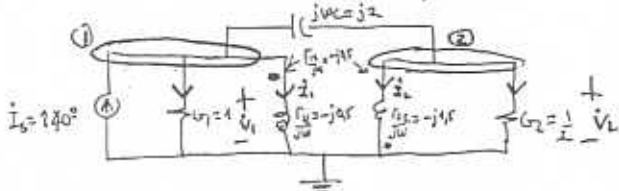
44-A

PROBLEMA: PARA EL CIRCUITO DE LA FIGURA EN RPS, DETERMINE $V_L(t)$ MEDIANTE MÉTODO MODAL



EN ESTE CASO $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < 0$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow F = \frac{1}{\det L} \begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}/j\omega & r_{12}/j\omega \\ r_{21}/j\omega & r_{22}/j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_1 = \left(\frac{r_{11}}{j\omega} \right) \dot{V}_1 + \left(\frac{r_{12}}{j\omega} \right) \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_2 = \left(\frac{r_{21}}{j\omega} \right) \dot{V}_1 + \left(\frac{r_{22}}{j\omega} \right) \dot{V}_2$$

LCK NO. 30 ① $\dot{V}_2 = G_1 \dot{V}_1 + \left(\frac{r_{12}}{j\omega} \right) \dot{V}_1 + \left(\frac{r_{22}}{j\omega} \right) \dot{V}_2 + j\omega C (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)$

② $0 = G_2 \dot{V}_2 + \left(\frac{r_{21}}{j\omega} \right) \dot{V}_1 + \left(\frac{r_{22}}{j\omega} \right) \dot{V}_2 + j\omega L (\dot{V}_2 - \dot{V}_1)$

$$\begin{bmatrix} G_1 + \frac{r_{11}}{j\omega} + j\omega C & \frac{r_{12}}{j\omega} - j\omega C \\ \frac{r_{21}}{j\omega} - j\omega C & G_2 + \frac{r_{22}}{j\omega} + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

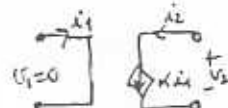
$$\begin{bmatrix} 1 + j1.5 & -j1.5 \\ -j1.5 & 0.5 + j0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FUENTES DEPENDIENTES (O CONTROLADAS)

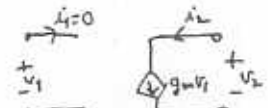
SON ELEMENTOS ACOPLAOS IDEALES MUY ÚTILES EN LA MODELACIÓN DE DISPOSITIVOS Y CIRCUITOS ELECTRÓNICOS.

ELEMENTOS DE 2-PUERTAS, EN EL QUE LA RAMA 2 ES UNA FUENTE DE VOLTAJE O DE CORRIENTE, MIENTRAS QUE LA RAMA 1 ES UN CIRCUITO ABIERTO O CORTO-CIRCUITO. LA FUENTE EN LA RAMA 2 ESTÁ CONTROLADA POR EL VOLTAJE O LA CORRIENTE DE LA RAMA 1.

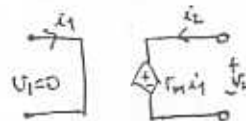
FUENTES DEPENDIENTES LINEALES-INVARIANTES HAY 4 TIPOS



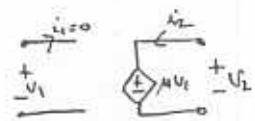
FUENTE DE CORRIENTE CONTROLADA POR CORRIENTE



FUENTE DE CORRIENTE CONTROLADA POR VOLTAJE



FUENTE DE VOLTAJE CONTROLADA POR CORRIENTE



FUENTE DE VOLTAJE CONTROLADA POR VOLTAJE

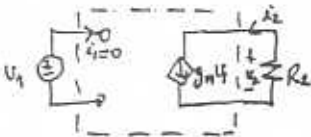
PARÁMETROS α , g_m , r_m Y μ SON CONSTANTES PARA ELEMENTOS LINEALES INVARIANTES

LA POTENCIA INSTANTÁNEA INGRESANDO AL 2-PUERTAS ES

$$p(t) = V_1(t) i_1(t) + V_2(t) i_2(t) = V_2(t) i_2(t) \quad (1)$$

YA QUE EN LA RAMA 1, $V_1 = 0$ O $i_1 = 0$.

EJEMPLO



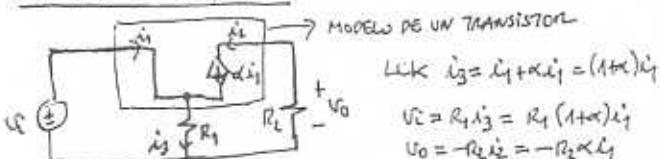
EN EL ELEMENTO RESISTIVO R_2 , $V_2 = -R_2 i_2$ SEGÚN LEY DE OHM

DESARROLLANDO EN (1) SE TIENE QUE $p(t) = -R_2 i_2^2(t) < 0$ W

LA POTENCIA INSTANTÁNEA INGRESANDO AL 2-PUERTAS ES SIEMPRE NEGATIVA, ES DECIR LA FUENTE DEPENDIENTE ENTREGA POTENCIA A LA RESISTENCIA R_2

LAS FUENTES CONTROLADAS SON ELEMENTOS RESISTIVOS DE 2-PUERTAS QUE PUEDEN ENTREGAR ENERGÍA AL EXTERIOR, LUEGO SON ELEMENTOS ACTIVOS.

AMPLIFICACIÓN DE POTENCIA



POTENCIA ENTREGADA POR LA FUENTE AL CIRCUITO $P_i = V_i i_i = R_1 (1 + \beta) i_b^2$
 POTENCIA ENTREGADA POR EL CIRCUITO A CARGA $P_o = V_o i_o = R_L i_c^2$

LA GANANCIA DE POTENCIA ES

$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{R_L}{R_1}$$

TÍPICAMENTE $\alpha \sim 100$ PARA UN TRANSISTOR.

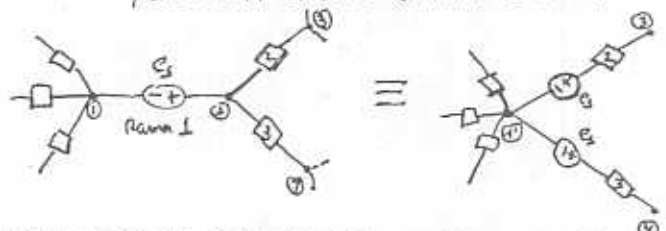
ESCOGIENDO R_1, R_L APROPIADAMENTE SE PUEDEN OBTENER GANANCIAS ARBITRARIAS.

TRANSFORMACIONES DE FUENTES

(VÁLIDAS PARA FUENTES DEPENDIENTES TAMBIÉN, SALVO QUE SE AFECTE LA VARIABLE CONTROLADA)

① DESPLAZAMIENTO

SE ELIMINAN RAMAS CONTINENTES DE FUENTES DE VOLTAJE SOLAMENTE, QUE NO ESTÁN EN SERIE CON NINGÚN ELEMENTO

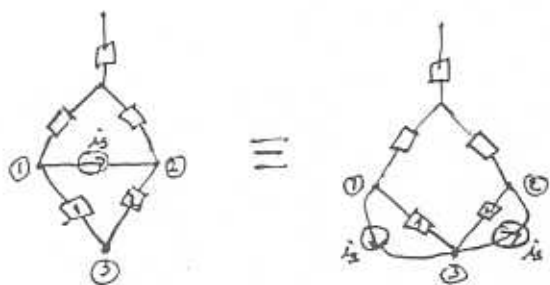


LCK PARA TODOS LOS BUCLES (MALLAS) QUE CONTIENEN RAMAS 2 Y 3 EN AMBOS REDES SON IGUALES.

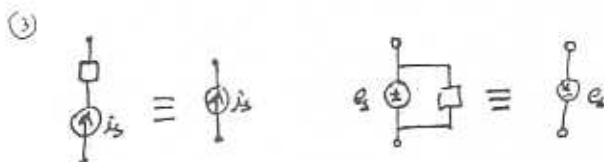
SE INTALDICE NUEVO NODO ① COMO RESULTADO DE LA FUSIÓN DE ① Y ②

LCK APLICADA AL NODO ① ES IGUAL A LA SUMA DE LAS ECK OBTENIDAS AL APLICAR LCK A NODOS ① Y ② $\Rightarrow$ SUPERNODO

- ② SE ELIMINAN RAMAS CONSISTENTES DE FUENTES DE CORRIENTE SOLAMENTE, QUE NO ESTÁN EN PARALELO CON ALGÚN ELEMENTO.



LCK EN ①, ② Y ③ PERMANECEN IGUALES



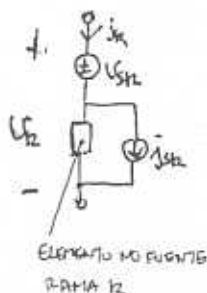
ELEMENTO O FUENTE DE VOLTAJE
DEPENDIENTE AL CIRCUITO

ELEMENTO O FUENTE DE
CORRIENTE PUEDE RECOMBINARSE
POR UN CIRCUITO ABIERTO

LAS TRANSFORMACIONES ANTERIORES PERMITEN DIF:

- CADA FUENTE DE VOLTAJE ESTÁ CONECTADA EN SERIE CON UN ELEMENTO QUE NO ES UNA FUENTE
- CADA FUENTE DE CORRIENTE ESTÁ CONECTADA EN PARALELO CON UN ELEMENTO QUE NO ES UNA FUENTE.

RAMA TÍPICA



$$y_k(D) = \begin{cases} G_k \\ C_k D \\ \frac{1}{L_k D} \end{cases}$$

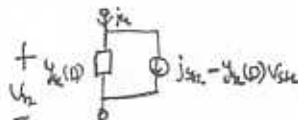
ENTONCES POR LCK

$$j_k = j_{sk} + y_k(D)(v_k - v_{sk})$$

$$j_k = j_{sk} - y_k(D)v_{sk} + y_k(D)v_k \quad (1)$$

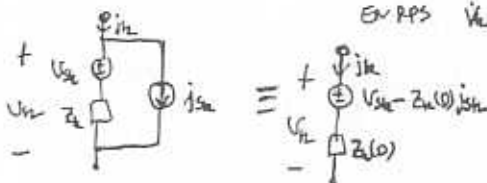
$$\text{EN RPS } \tilde{j}_k = \tilde{j}_{sk} - y_k \tilde{v}_{sk} + y_k \tilde{v}_k$$

PARA ANÁLISIS NODAL CONVIENE
TENER FUENTES DE CORRIENTE SOLAMENTE



$$\text{ALTERNATIVAMENTE DE (1)} \Rightarrow v_k = v_{sk} - Z_k(D)j_{sk} + Z_k(D)j_k \quad (2)$$

$$\text{EN RPS } \tilde{v}_k = \tilde{v}_{sk} - Z_k \tilde{j}_{sk} + Z_k \tilde{j}_k$$



ESTA ES LA FORMA USADA EN ANÁLISIS DE CIRCUITOS
REGIONALES O DE MALLAS.

ECUACIONES NODALES

PARA CIRCUITOS LINEALES - INVARIANTES COMPUESTOS POR
RESISTENCIAS, CAPACITANCIAS, INDUCTANCIAS, INDUCTANCIAS
ACOPLADAS Y TRANSFORMACIONES IDEALES, FUENTES DEPENDIENTES
Y FUENTES INDEPENDIENTES

LAS ECUACIONES DE RAMA, EN EL DOMINIO DEL TIEMPO SON

$$\text{EN RPS } \begin{cases} \tilde{j} = y_b(D)\tilde{v} + \tilde{j}_s - y_b(D)\tilde{v}_s \\ \tilde{j}_s = y_b(D)\tilde{v}_s + \tilde{j}_s - y_b(D)\tilde{v}_s \end{cases} \quad (3)$$

$y_b(D)$: "OPERADOR" MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA

$y_b(D)$ ES DIAGONAL SI SOLO R, L, C

$$y_{bk} = \begin{cases} G_k \\ C_k D \\ \frac{1}{L_k D} \end{cases}$$

LA MATRIZ y_b DEJA DE SER DIAGONAL AL INTRODUCIR
INDUCTANCIAS ACOPLADAS, PERO SIGUE SIEMPRE SIMÉTRICA.

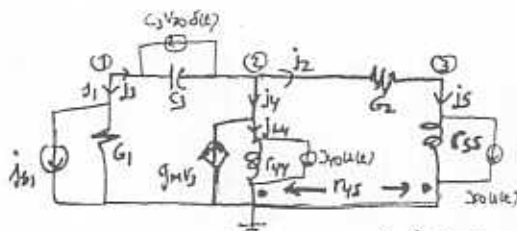
LA INTRODUCCIÓN DE FUENTES DEPENDIENTES CONDUCE EN
GENERAL A LA PÉRDIDA DE SIMETRÍA DE y_b .

PARA b RAMAS

$$\begin{aligned} \tilde{j}_s &= \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} & \tilde{v}_s &= \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix} & y_b(D) &= \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1b} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{b1} & y_{b2} & \dots & y_{bb} \end{bmatrix} & \tilde{j} &= \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} & \tilde{v} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \\ \text{b x 1} & & \text{b x 1} & & \text{b x b} & & \text{b x 1} & & \text{b x 1} \end{aligned}$$

CORRIENTES DE RAMA VOLTAJES DE RAMA

EJEMPLO



$$\begin{aligned} v_3(0^+) &= v_{30} \\ j_4(0^+) &= j_{40} \\ j_5(0^+) &= j_{50} \end{aligned}$$

ECS. DE RAMA

$$j_1 = G_1 v_1 + j_{s1}$$

$$j_2 = G_2 v_2$$

$$j_3 = C_3 D v_3 - C_3 v_{30}$$

$$j_4 = r_{44} D v_4 + r_{45} D v_5 + j_{40} - g_m v_3$$

$$j_5 = r_{54} D v_4 + r_{55} D v_5 + j_{50} - g_m v_3$$

j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 corrientes de rama
 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 voltajes de rama

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_m & r_{44} D & r_{45} D \\ 0 & 0 & 0 & r_{54} D & r_{55} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ j_{40} \\ j_{50} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3 v_{30} \\ j_{40} \\ j_{50} \end{bmatrix}$$

FUENTES ESTADO INICIAL

0 EN ESTE CASO
LA ÚNICA FUENTE DE VOLTAJE $v_{30}(0^+)$ SE TRANSFORMA
A FUENTE DE CORRIENTE $C_3 v_{30}(0^+)$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

HERAMIENTA FUNDAMENTAL PARA ESTUDIAR SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE REDUCE LA SOLUCIÓN DE ECU. DIF. LINEALES A LA SOLUCIÓN DE ECU. LINEALES ALGEBRAICAS

SEA $f(t)$ UNA FUNCIÓN DEL TIEMPO DEFINIDA EN $[0, \infty)$

($f(t) = 0 \forall t < 0$)

$$F(s) \triangleq \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{TRANSFORMADA DE LAPLACE}$$

$\leftarrow 0^- \text{ PARA INCLUIR IMPULSO EN } t=0$

$$f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \text{ANTI-TRANSFORMADA DE LAPLACE}$$

DONDE $s = \sigma + j\omega$ ES LA FRECUENCIA COMPLEJA.

LA REGIÓN DE CONVERGENCIA O EL DOMINIO DE EXISTENCIA DE $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ES EL SEMIPLANO DERECHO SIN INCLUIR EJE IMAGINARIO.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \cos \omega t dt - j \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \sin \omega t dt$$

SI $\text{Re}(s) = \sigma > 0$ SUFICIENTEMENTE GRANDE, ENTONCES $e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ SUFICIENTEMENTE RÁPIDO PARA QUE LA INTEGRAL SEA FINITA, YA QUE EL INTERVALO DE INTEGRACIÓN ES INFINITAMENTE GRANDE.

ESTA ES LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE, ÚTIL EN ANÁLISIS DE REGÍMENES TRANSITORIOS CON CONDICIONES INICIALES

Ej. 1 $f(t) = u(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s} \left[\underbrace{e^{-(\sigma + j\omega)t}}_{\text{PARA } \sigma > 0 \rightarrow 0} \right]_{t=0} - 1 = \frac{1}{s} = \frac{1}{\sigma + j\omega} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{PARA } \text{Re}(s) > 0$$

Ej. 2 $f(t) = e^{at}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad \text{PARA } \text{Re}(s-a) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \text{PARA } \text{Re}(s-a) > 0$$

YA QUE LAS EXPRESIONES $\frac{1}{s}$ Y $\frac{1}{s-a}$ ESTÁN BIEN DEFINIDAS $\forall s$ (CON $s \neq 0$ Y $s \neq a$, RESPECTIVAMENTE POR CONTINUACIÓN ANALÍTICA SE PUEDE EXTENDER EL DOMINIO DE LA T. DE LAPLACE A TODO s , DONDE LA EXPRESIÓN ESTÉ BIEN DEFINIDA.

Ej. 3 $f(t) = \delta(t)$ $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$

$$\therefore \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \forall s$$

PROPIEDADES BÁSICAS DE T. DE LAPLACE

① UNICIDAD: UNA FUNCIÓN DEL TIEMPO $f(t)$ ESTÁ ESPECIFICADA ÚNICAMENTE POR SU T. DE LAPLACE Y VICEVERSA

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

② LINEALIDAD:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \end{aligned}$$

c_1, c_2 CONSTANTES

TAMBIÉN

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

Ej. 4 $f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

ANÁLOGAMENTE

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j} e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t}\right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \therefore \mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

③ REGLA DE DIFERENCIACIÓN

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^-)$$

Ej. 5

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t)\} &= 1 \\ \mathcal{L}\{\delta'(t)\} &= s \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} &= s^n \end{aligned}$$

LA REGLA SE EXTIENDE DE MODO QUE

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0^-) - \dots - f^{(n-2)}(0^-)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

④ REGLA DE INTEGRACIÓN

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t') dt'\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Ej. 6

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta(t') dt' &= u(t) \rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \frac{1}{s} \\ \int_0^t u(t') dt' &= t \rightarrow \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s^2} \\ \int_0^t t' dt' &= \frac{t^2}{2} \rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} = \frac{1}{s^3} \\ \vdots \\ \int_0^t \frac{t'^n}{n!} dt' &= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right\} = \frac{1}{s^{n+2}} \quad \forall n \end{aligned}$$

- EJ.7 CALCULAR LA RESPUESTA AL IMPULSO $i(t) = \delta(t)$ MEDIANTE TRANSFORMADA DE LAPLACE



$$C \frac{d(v(t) + 0 \cdot h(t))}{dt} = \delta(t) \quad \text{CON } h(0^-) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{C \frac{dv(t)}{dt} + Gv(t)\} &= \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \\ = C \mathcal{L}\{\frac{dv(t)}{dt}\} + G \mathcal{L}\{v(t)\} &= 1 \\ C[sV(s) - v(0^-)] + G V(s) &= 1 \end{aligned}$$

$$(Cs + G)V(s) = 1$$

$$H(s) = \frac{1}{Cs + G} = \frac{1}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad \text{EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA COMPLEJA } s$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{C} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = \frac{1}{C} e^{-t/RC}$$

$$\therefore h(t) = \frac{1}{C} e^{-t/RC} \quad \forall t \quad \text{EN EL DOMINIO DEL TIEMPO}$$

RESPUESTA ES CERO PARA $t < 0$.

(5)

TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

$$f_3(t) = f_1(t) * f_2(t) \triangleq \int_0^t f_1(t-z) f_2(z) dz, \quad t \geq 0$$

SI $f_2(t)$ TIENE IMPULSO EN EL ORIGEN, DEBE INCLUIRSE. LO MISMO SI $f_1(t)$ TIENE IMPULSO EN $t=z$, DEBE INCLUIRSE

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s) = F_1(s) F_2(s)$$

$$\text{DONDE } \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \quad \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$$

$$\begin{aligned} \text{DEM: } \mathcal{L}\{f_1 * f_2\} &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-z) f_2(z) dz\right] \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(t-z) f_2(z) dz\right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

COMO $f_{1,2}(t-z) = 0 \quad \forall z > t$, SE PUEDE REORGANIZAR EL LÍMITE SUPERIOR DE INTEGRACIÓN POR ∞ .

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(t-z) f_2(z) dz e^{-st} dt$$

REEMPLAZANDO $e^{-st} = e^{-s(t-z)} e^{-sz}$ Y AGRUANDO TÉRMINOS

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1 * f_2\} &= \int_0^\infty f_2(z) e^{-sz} dz \int_0^\infty f_1(t-z) e^{-s(t-z)} dt \\ &= \int_0^\infty f_2(z) e^{-sz} dz \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \quad \text{CON } \lambda = t-z \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = F_1(s) F_2(s)$$

RESPUESTA DE ESTADO CERO

- 1) PARA CUALQUIER CIRCUITO LINEAL-INVARIANTE LA RESPUESTA DE ESTADO CERO SE OBTIENE POR CONVOLUCIÓN

$$v(t) = \int_0^t h(t-z) i(z) dz \quad t \geq 0$$

SI $i(t)$ TIENE UN IMPULSO EN EL ORIGEN DEBE INCLUIRSE, LO MISMO $h(t)$, LUEGO $h(t-z)$ PODRÍA TENER IMPULSO EN $t=z$.

- 2) LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA RESPUESTA AL IMPULSO ES LA FUNCIÓN DE RED

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$$

- 3) FUNCIÓN DE RED $H(s) \triangleq \frac{\mathcal{L}\{\text{RESP. ESTADO CERO}\}}{\mathcal{L}\{\text{ENTRADA}\}}$

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t h(t-z) i(z) dz\right\}$$

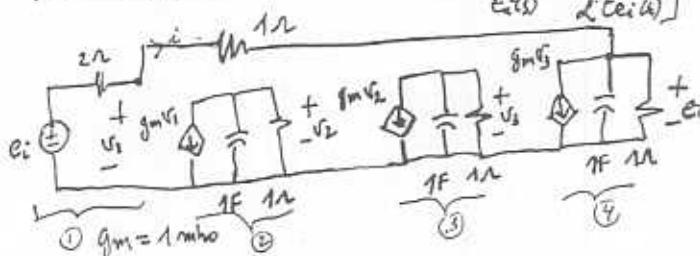
$$\text{DESC} \quad V(s) = H(s) I(s)$$

DONDE $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ CON $i(t)$ ENTRADA

$$\therefore H(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

EN ESTE CASO (EN GENERAL HAY 4 FORMAS POSIBLES) YA QUE TANTO LA VARIANTE DE ENTRADA COMO DE SALIDA PUEDE SER UN VOLTAGE O CORRIENTES.

- EJ.8 PARA EL CIRCUITO LINEAL INVARIANTE DE LA FORMA DETERMINE LA FUNCIÓN DE RED $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\mathcal{L}\{e_o(t)\}}{\mathcal{L}\{e_i(t)\}}$



EN BLOQUE (1) LCK $g_m v_1 + C \frac{dv_1}{dt} + v_1 = 0$

$$g_m v_1(s) + (Cs + 1)v_1(s) = 0$$

$$\frac{v_1(s)}{v_1(s)} = \frac{-g_m}{Cs + 1} = \frac{-1}{s + 1} \quad (1)$$

EN BLOQUE (2) $\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{-1}{s + 1}$ YA QUE ES IGUAL AL BLOQUE (1)

EN BLOQUE (3) $v_2 = v_1 - 2i = v_1 - \frac{2}{3}(v_1 - v_2) = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$

$$v_1(s) = \frac{1}{3}E_i(s) + \frac{2}{3}E_o(s) \Rightarrow \frac{v_1(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} \quad (2)$$

LUEGO $\frac{v_2(s)}{E_i(s)} = \frac{v_2}{v_1} \frac{v_1}{E_i} = \frac{1}{(s+1)} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} \right) \quad (3)$

EN BLOQUE (4) $g_m v_3 + C \frac{dv_3}{dt} + v_3 = (v_1 - v_2)/3$

$$v_3(s) + (s + \frac{4}{3})v_3(s) = E_i(s)/3 \quad \times \frac{1}{E_i}$$

$$\frac{v_3(s)}{E_i(s)} + (s + \frac{4}{3}) \frac{v_3(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[\frac{s + \frac{4}{3}}{(s + 1)^2} + (s + \frac{4}{3}) \right] \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(s+1)^2} \right]$$

PODRIAMOS DESPEJAR $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$

Ecuaciones de los Elementos

EL3/A

MN1

(R) $\begin{matrix} \downarrow i_R(t) \\ + \\ R \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_R(t) = R i_R(t) \\ i_R(t) = G v_R(t) \end{matrix} \xrightarrow{L} \begin{matrix} V(s) = R I(s) \\ I(s) = G V(s) \end{matrix} \quad G = \frac{1}{R}$

(C) $\begin{matrix} \downarrow i_C(t) \\ + \\ C \\ - \end{matrix} \equiv \begin{matrix} + \\ v_C(t) \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \\ v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt + v_C(0) \end{matrix}$

$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' + v_C(0)$

$V_C(s) = \frac{1}{s} \int_0^s I_C(s') ds' + \frac{v_C(0)}{s}$

$V_C(s) = \frac{1}{s} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$

$I_C(s) = s V_C(s) - v_C(0)$

Visto de otro modo

$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \xrightarrow{L} I_C(s) = C [s V_C(s) - v_C(0)]$
 regla de derivación

EL3/A

MN2

(L) $\begin{matrix} \downarrow i_L(t) \\ + \\ L \\ - \end{matrix} \equiv \begin{matrix} + \\ v_L(t) \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(0) = I_0 \end{matrix}$

$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{L} V_L(s) = L s I_L(s) - L I_0$

$\times \frac{1}{s} \Rightarrow I_L(s) = \frac{1}{s} V_L(s) + \frac{I_0}{s}$

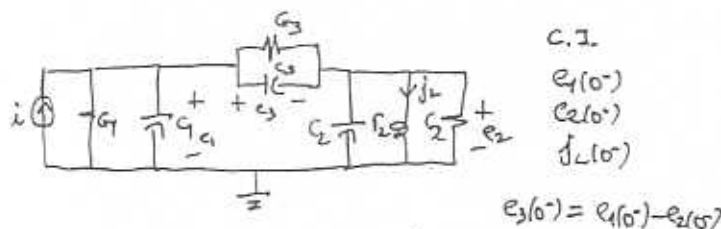
$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t') dt' + I_0$

$\begin{matrix} \downarrow I_L(s) \\ + \\ -L I_0 \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ V_L(s) \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ I_L(s) \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ V_L(s) \\ - \end{matrix}$

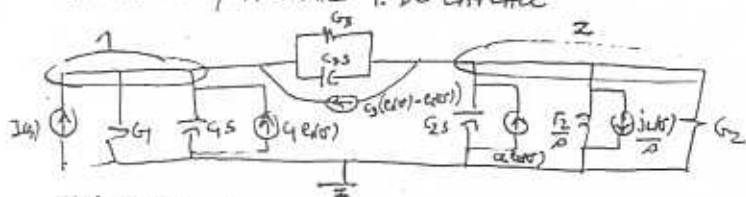
Método Nodal

EL3/A

MN3



- INCORPORAR FUENTES REPRESENTANDO CONDICIONES INICIALES Y APLICAR T. DE LAPLACE



Método inspección

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -(G_2 + G_3) \\ -(G_2 + G_3) & G_2 + G_3 + G_1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) + G_1 e_1(0) - G_2 e_2(0) \\ (G_2 e_2(0) - i_L(0)) - G_3 e_1(0) + G_3 e_2(0) \end{bmatrix}$$

Suma de admitancias conectados al nodo 1

Suma de admitancias conectados al nodo 2

Suma de fuentes de corriente ingresando al nodo 2.

PROCEDIMIENTO MATRICIAL PARA PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES NODALES

PARA CIRCUITOS LINEALES-INVARIANTES COMPUESTOS POR RESISTENCIAS, CAPACITANCIAS, INDUCTANCIAS, IND. ACOPLADAS, TRANSFORMADORES IDEALES, FUENTES DEPENDIENTES Y FUENTES INDEPENDIENTES

EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$A \vec{J} = \vec{0} \quad (1) \quad LCK$
 $\vec{U} = A^T \vec{E} \quad (2) \quad LVK$

$\vec{J} = \gamma_b(0) \vec{U} + \vec{J}_b - \gamma_b(0) \vec{U}_s \quad (3) \quad ECU RAMA$

DONDE

$\vec{J} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$

VECTOR DE CORRIENTES DE RAMA

$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_b \end{bmatrix}$

VECTOR DE VOLTAJES DE RAMA

$\vec{E} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$

VECTOR DE VOLTAJES DE NODO A NODO DE REFERENCIA ($m = n_e - 1$)

PROCEDIMIENTO NODAL QUE LA RED HA SIDO PUESTA EN LA FORMA DE RAMAS TÍPICAS. CONSIDEREMOS UNA RED DE b RAMAS Y n_e MODOS.

LA RED SE PUEDE REPRESENTAR MEDIANTE UN GRAFO ORIENTADO

SEA $G \triangleq (V, B)$ UN GRAFO

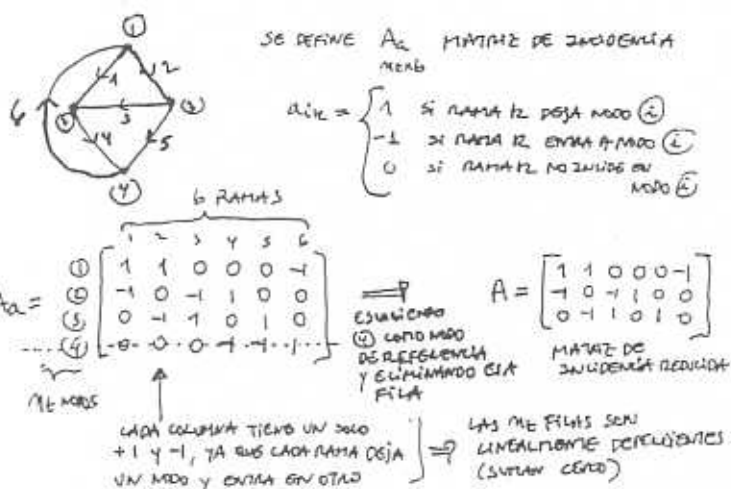
$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ UN CONJUNTO DE n_e MODOS

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_b\}$ UN CONJUNTO DE b RAMAS

1) PARA CONSTRUIR EL GRAFO DE LA RED CADA RAMA TÍPICA SE REPRESENTA POR UNA RAMA ORIENTADA



2) EL GRAFO ORIENTADO SE PUEDE DESCRIBIR POR SU MATRIZ DE INADANIA RAMA-MODO



SEA A LA MATRIZ DE INADANIA REDUCIDA, TAL QUE SI SE OBTIENE DE A_a ELIMINANDO LA FILA CORRESPONDIENTE AL NODO DE REFERENCIA, ENTONCES

$$A \vec{J} = \vec{0} \quad \text{LCK} \quad (1)$$

LA MATRIZ A $(m \times b)$ TIENE RANGO COMPLETO $m \times 1$

EJEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 + j_2 - j_6 \\ -j_1 - j_2 + j_4 \\ -j_2 + j_3 + j_5 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

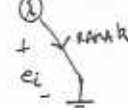
LVK

SEAN $v_1, v_2, \dots, v_b$ VOLTAJES DE RAMAS
 $e_1, e_2, \dots, e_n$ VOLTAJES DE NODO A NODO DE REFERENCIA ($m = m-1$)

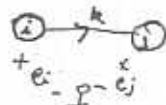
PARA REDES NO TRIVIALES $b > m$ Y SE TIENEN m GRADOS DE LIBERTAD. LOS VOLTAJES DE NODO A NODO DE REFERENCIA SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES, YA QUE NO FORMAN MALLAS CERRADAS. HAY DOS TIPOS DE RAMAS:

INDEPENDIENTE EN NODO REFERENCIA

NO-INDEPENDIENTE EN NODO REF.



$$v_k = \begin{cases} +e_i & \text{si RAMA k DEJA A NODO } i \\ -e_i & \text{si RAMA k ENTRA A NODO } i \end{cases}$$



$$v_k = e_i - e_j \quad \text{si RAMA k DEJA A NODO } i \text{ Y ENTRA A NODO } j$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\text{DONDE } c_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si RAMA k DEJA A NODO } i \\ -1 & \text{si RAMA k ENTRA A NODO } i \\ 0 & \text{si RAMA k NO ENTRA NI EN NODO } i \end{cases}$$

SE TIENE QUE $c_{ki} = a_{ik} \quad \forall i, k$

LUEGO $C = A^T$ DONDE A ES LA MATRIZ DE INADANIA REDUCIDA

$$\text{LVK} \quad \vec{V} = A^T \vec{e} \quad (2)$$

EJ. NODALES INTEGRO-DIFERENCIALES

DE (1), (2) Y (3)

$$\vec{0}^{(1)} = A \vec{J} \stackrel{(1)}{=} A \gamma_b(0) \vec{V} + A \vec{J}_s - A \gamma_b(0) \vec{V}_s$$

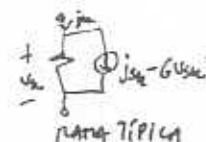
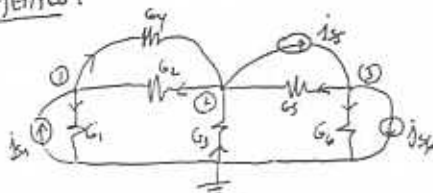
$$\vec{0}^{(1)} = A \gamma_b(0) A^T \vec{e} + A \vec{J}_s - A \gamma_b(0) \vec{V}_s$$

$$A \gamma_b(0) A^T \vec{e} = A \gamma_b(0) \vec{V}_s - A \vec{J}_s$$

$$\boxed{\gamma_n(0) \vec{e} = \vec{J}_s}$$

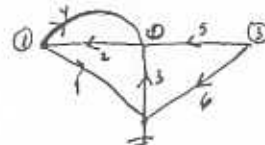
DONDE $\gamma_n(0) = A \gamma_b(0) A^T$ "OPERADA" MATRIZ DE ADMITANCIAS NODALES
 $\vec{J}_s = A \gamma_b(0) \vec{V}_s - A \vec{J}_s$ VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE

EJEMPLO:



PARA TÍPICA PERMITE TRATAMIENTO SEPARADO DE FUENTES INDEPENDIENTES. EL GRAFO ORIENTADO DEL CIRCUITO SE OBTIENE HACIENDO CERO LAS FUENTES INDEP.

$$\vec{J}_s = \begin{bmatrix} -j_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} \quad \text{VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE RAMA TÍPICA}$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_n(0) = A \gamma_b(0) A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & 0 \\ 0 & G_3 & G_4 \\ 0 & 0 & G_5 & G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_n(0) = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -(G_2 + G_4) & 0 \\ -(G_2 + G_4) & G_2 + G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{J}_s = -A \vec{J}_s = A (-\vec{J}_s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ -j_2 \\ -j_5 + j_6 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_n \vec{e} = \vec{J}_s \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

PROCEDIMIENTO MATRICIAL PARA PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES DE MALLA

PROCEDIMIENTO SUPONE QUE LA RED HA SIDO PUESTA EN LA FORMA DE RAMAS TÍPICAS PARA MÉTODO REGIONAL O DE MALLAS.

EL MÉTODO DE ANÁLISIS NODAL ES GENERAL, MIENTRAS QUE EL DE ANÁLISIS DE MALLAS ESTÁ RESTRINGIDO A REDES PLANARES.

DEFINICIÓN: UN GRAFO G SE DICE "PLANAR" SI PUEDE DIBUJARSE EN EL PLANO DE TAL MODO QUE DOS RAMAS CUALQUIERA NO SE INTERSECTEN EN UN PUNTO QUE NO SEA UN NODO.



GRAFO PLANAR



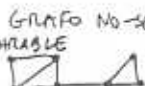
GRAFO NO-PLANAR

SE DEFINE "MALLA" DEL GRAFO PLANAR A CUALQUIER BUCLE QUE NO CONTENGA RAMAS EN SU INTERIOR. SI NO CONTIENE RAMAS EN SU EXTERIOR SE LLAMA "MALLA EXTERNA".

OTRAS DEFINICIONES:

GRAFO CONECTADO: SI AL MENOS HAY UNA TRAYECTORIA ENTRE DOS NODOS DEL GRAFO.

GRAFO NO-SEPARABLE: SI AL PARTITIONARSE EN 2 SUBGRAFOS CUALQUIERA TIENE AL MENOS DOS NODOS EN COMÚN



LEYES DE KIRCHHOFF

SI SE ELIMINA LA MALLA EXTERNA, POR LK_K SE OBTIENEN l ECU. LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

SEA $M_{l \times b}$ MATRIZ DE MALLAS QUE SE OBTIENE DE M_a AL ELIMINAR LA FILA CORRESPONDIENTE A LA MALLA EXTERNA.

$$M \vec{I} = 0 \quad (1) \text{ LK}$$

$$\vec{I} = M^T \vec{I}_s \quad (2) \text{ LK}$$

DONDE $\vec{I}_{s, k1} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sl} \end{bmatrix}$ SON LAS CORRIENTES DE MALLAS, QUE SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

$\vec{I}$: VECTOR DE CORRIENTES DE RAMA
 $\vec{I}_s$: VECTOR DE VOLTAJES DE RAMA

PARA REDES LINEALES-INVARIANTES SE TIENE QUE

$$\vec{V} = Z_b(D) \vec{I} + \vec{V}_s - Z_b(D) \vec{I}_s \quad (3) \text{ ECU. MALLA}$$

DONDE $Z_b(D)_{b \times b}$: "OPERADOR" MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA.

PARA UN GRAFO CONECTADO, NO-SEPARABLE Y PLANAR EL NÚMERO DE MALLAS DE UN CIRCUITO, SIN CONTAR LA MALLA EXTERNA ES:

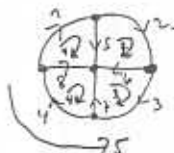
$$l = b - (n - 1) = b - n + 1$$

$\downarrow$ ramas $\downarrow$ nodos

DEMOSTRACIÓN ES POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

MATRIZ M_a

SEA UN GRAFO G CON b RAMAS Y $l+1$ MALLAS INCLUYENDO LA MALLA EXTERNA.



CONVENCIÓN: SENTIDO A FAVOR DEL RELOJ PARA CADA MALLA, EXCEPTO LA EXTERNA QUE ES CONTRA LOS PUNTOS DEL RELOJ

$$m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{SI RAMA } k \text{ ESTÁ EN MALLA } i \text{ Y LAS DIRECCIONES DE REF. COINCIDEN} \\ -1 & \text{SI RAMA } k \text{ ESTÁ EN MALLA } i \text{ Y LAS DIRECCIONES DE REF. NO COINCIDEN} \\ 0 & \text{SI RAMA } k \text{ NO PERTENECE A LA MALLA } i \end{cases}$$

RAMAS

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	1	0	0	-1	
2	0	1	0	0	-1	1	0	0
3	0	0	1	0	0	-1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	-1	1
5	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

↑ MALLAS

M_a
 5×8

→ CADA COLUMNA TIENE UN SOLO +1 Y -1, YA QUE CADA RAMA PERTENECE A DOS MALLAS (SI SE INCLUYE LA EXTERNA).

ECUACIONES DE MALLAS

DE (1), (2) Y (3) SE OBTIENEN LAS ECU. DE MALLA

$$\begin{aligned} M \vec{I} &= M Z_b(D) \vec{I} + M \vec{V}_s - M Z_b(D) \vec{I}_s = 0 \\ &\Rightarrow M Z_b(D) M^T \vec{I} + M \vec{V}_s - M Z_b(D) \vec{I}_s = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_m(D) \vec{I} = \vec{E}_s} \quad \text{ECU. DE MALLA}$$

DONDE $Z_{m, l \times l}(D) = M Z_b(D) M^T$ "OPERADOR" MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE MALLA

$$\vec{E}_{s, l \times 1} = M Z_b(D) \vec{I}_s - M \vec{V}_s \quad \text{VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE DE MALLA}$$

NOTAS:

$Z_b(D)$ ES DIAGONAL Y $Z_m(D)$ ES SIMÉTRICA SI NO HAY ELEMENTOS ACOPLADOS

SI HAY ELEMENTOS ACOPLADOS (FRES DEP. O IMPEDANCIAS ACOPLADAS) $Z_b(D)$ NO ES DIAGONAL Y $Z_m(D)$ NO ES SIMÉTRICA EN GENERAL.

PARA CIRCUITOS LINEALES INVARIANTES USANDO EL METODO DE LOS NODOS SE OBTIENE

$$Y_m(s) E(s) = I_s(s) \quad \text{Ecu. Matricial}$$

$n \times n$	$m \times 1$	$n \times 1$
Matriz de admitancia nodal en la frecuencia compleja	Vector de las componentes en la T. Laplace de los voltajes de cada nodo de referencia	Vector de T. de Laplace de fuentes de corriente nodal incluyendo las condiciones iniciales como fuentes

Solución:

$$E(s) = Y_m^{-1}(s) I_s(s)$$

Si interesa encontrar una de las incógnitas no es necesario invertir la matriz

Método de los cofactores

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & & Y_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Sea $\Delta_n(s) \triangleq \det Y_m(s) = \sum_{i=1}^n Y_{ii}(s) \Delta_{ij}(s)$

donde

Δ_{ij} = cofactor de Y_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces

el determinante que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de $Y_m(s)$.

Por regla de Cramer

$$E_j(s) = \frac{1}{\Delta_n(s)} \begin{vmatrix} I_1 & \dots & I_j & \dots & I_n \\ Y_{21} & & Y_{2j} & & Y_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{m1} & \dots & Y_{mj} & \dots & Y_{mn} \end{vmatrix} = \frac{\sum_{k=1}^m \Delta_{kj}(s) I_k(s)}{\Delta_n(s)}$$

Para cualquier red lineal-invariante

$$R_{COMPLETA} = R_{ESC} + R_{ENC}$$

$$\mathcal{L}\{R_{COMPLETA}\} = \mathcal{L}\{R_{ESC}\} + \mathcal{L}\{R_{ENC}\}$$

$$\begin{bmatrix} Y_m(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$E_2(s) = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} I(s) + \sum_{n=1}^n \frac{\Delta_{n2}(s) a_n}{\Delta_n(s)}$$

$$\mathcal{L}\{R_{COMPLETA}\} = \mathcal{L}\{R_{ESC}\} + \mathcal{L}\{R_{ENC}\}$$

FUNCIÓN DE RED Y RPS

$$H(s) = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} = \frac{E_2(s)}{I(s)} \quad \text{Función de Red}$$

En general para redes lineales e invariantes

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{R_{ESC}\}}{\mathcal{L}\{Entrada\}} \quad \text{Función de Red}$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

En el caso anterior si $x(t) = \delta(t) \rightarrow I(s) = 1$

$$\rightarrow E_2(s) = H(s) = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} \quad \text{T. Laplace de respuesta a impulso}$$

si $x(t) = u(t) \rightarrow I(s) = \frac{1}{s}$
 $\rightarrow$ respuesta al escalón

$$E_2(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{d\Delta}{dt}\right\} = s \mathcal{L}\{\Delta(t)\} = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} = H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

por unidad $h(t) = d\Delta(t)/dt$



Red en estado cero ent=0

$I_1 = I_m e^{j\omega t}$
aplicada en $t=0$

Conviene $I_m e^{j\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{I_m}{s-j\omega}$
y después se toma parte real

La T. de Laplace de las ese nodales es

$$\begin{bmatrix} Y_m(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_m}{s-j\omega} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

E_1 : entrada exponencial

$$E_2(s) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_n(s)} \frac{I_m}{s-j\omega} \quad (1)$$

Si todos los polos de $H(s)$ están en el semiplano izquierdo abierto, i.e. $\text{Re}(s) < 0, j=1,2,\dots$
La expansión en fracciones parciales de (1)
se puede agrupar en 2 tipos de términos

• $\frac{K_{j2}}{(s-p_j)^2} \rightarrow$ Las funciones del tiempo tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya que $\text{Re}(p_j) < 0$.

• Un único término

$$\frac{K}{s-j\omega} = \frac{H(j\omega) \text{Im}}{s-j\omega}$$

ya que $K = H(s) \text{Im}|_{s=j\omega}$

Para t suficientemente grande

$$e_z(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_z(s)] \approx H(j\omega) \text{Im} e^{j\omega t}$$

$$e_z(t) = \text{Re}\{h_z e^{j\omega t}\} \approx |H(j\omega)| \text{Im} \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

cuando $t \rightarrow \infty$ la tñe respuesta RPS es igual a la obtenida mediante el método fasorial

$$\text{La función de red } H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

da la razón entre el fasor de salida y el fasor de entrada en RPS a frecuencia ω .

PERMITE DESCOMPONER UNA CUALQUIER FUNCIÓN RACIONAL EN COMPONENTES MÁS SIMPLES

$$\text{Sea } F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$P(s)$ y $Q(s)$ polinomios en s variable compleja

Factorizando los polinomios en términos de sus ceros

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

z_i ceros de $P(s)$: CEROS
 p_j ceros de $Q(s)$: POLOS

(1) si $m \geq n$ (grado $P(s) \geq$ grado $Q(s)$)

la función racional es impropia

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \underbrace{\hat{P}(s)}_{\text{creciente}} + \underbrace{\frac{R(s)}{Q(s)}}_{\text{resto}} \quad \text{grado } R(s) < \text{grado } Q(s)$$

$\hat{P}(s)$ polinomio en s , luego las funciones correspondientes en el tiempo al aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ son $\delta(t)$, $\delta'(t)$, $\delta''(t)$ etc.

$$\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n \quad n=0,1,2,\dots$$

(2) si $m < n$ función racional propia

En general

a) POLOS SIMPLES

Sea $Q(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j)$ el denominador de $F(s)$

La expansión en fracciones parciales es de la forma

$$F(s) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s - p_j}$$

y el residuo del polo p_j se calcula como

$$K_j = \lim_{s \rightarrow p_j} (s - p_j) F(s)$$

Ejemplo:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$p_1 = -1, p_2 = -3$$

$$K_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{1}{s+3}|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{1}{s+1}|_{s=-3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) u(t)$$

$$F(s) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s - p_j}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left(\sum_{j=1}^n K_j e^{p_j t} \right) u(t)$$

Si $\text{Re}(p_j) > 0$, polo en semiplano derecho abierto se tiene una exponencial creciente.

Si $\text{Re}(p_j) < 0$, polo en semiplano izquierdo abierto, se tiene una exponencial decreciente.

b) POLOS MÚLTIPLES

$$Q(s) = (s - p_1)^{n_1} (s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_r)^{n_r}$$

con $\sum_{i=1}^r n_i = n$, grado de $Q(s)$.

Expansión es de la forma

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s - p_1} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1n_1}}{(s - p_1)^{n_1}} + \frac{K_{21}}{s - p_2} + \frac{K_{22}}{(s - p_2)^2} + \dots + \frac{K_{2n_2}}{(s - p_2)^{n_2}} + \dots + \frac{K_{r1}}{s - p_r} + \frac{K_{r2}}{(s - p_r)^2} + \dots + \frac{K_{rn_r}}{(s - p_r)^{n_r}}$$

Los residuos se calculan como

$$K_{1,m-1} = (s-p_1)^{m-1} F(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,m-1} = \frac{d}{ds} [(s-p_1)^{m-1} F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,m-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s-p_1)^{m-1} F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

etc.

luego se aplica la antitransformada de Laplace

$$\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{e^{at}}{n!} e^{-at}$$

→ Poles complejos

Los polos complejos ocurren en pares conjugados ya que $F(s)$ es razón de polinomios de coeficientes reales.

∴ $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ es un polo $G(p_1) = 0$

entonces $p_1^* = \sigma_1 - j\omega_1$ es también un polo $G(p_1^*) = 0$.

En el caso de polos simples la expansión en

fracciones parciales quedan $\frac{K_1}{s-\sigma_1-j\omega_1} + \frac{K_2}{s-\sigma_1+j\omega_1}$

La antitransformada de Laplace es

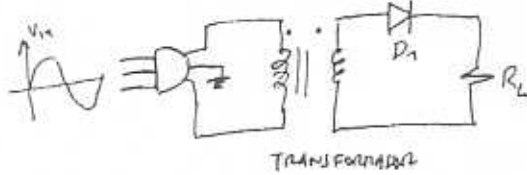
$$K_1 e^{(\sigma_1+j\omega_1)t} + K_2 e^{(\sigma_1-j\omega_1)t}$$

$$K_2 = K_1^*, \quad K_1 = |K_1| e^{j\phi_1}$$

$$|K_1| e^{\sigma_1 t} [e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \phi_1)}]$$

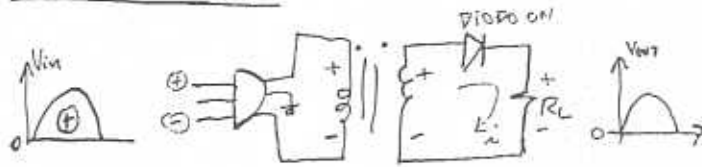
$$= 2|K_1| e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

RECTIFICADOR DE MEDIA ONDA

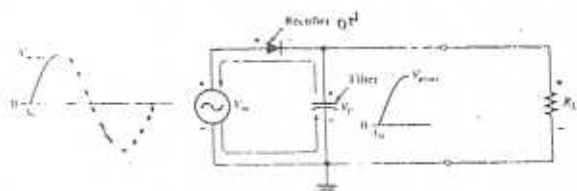
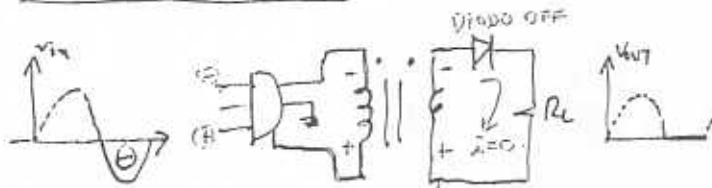


TRANSFORMADOR

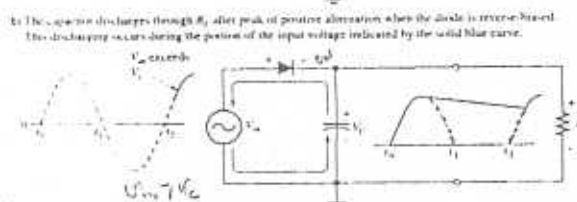
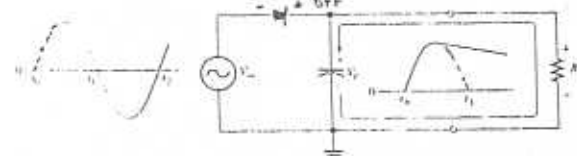
ANÁLISIS SEMICICLO POSITIVO



ANÁLISIS SEMICICLO NEGATIVO



(a) Initial charging of capacitor (diode is forward-biased) happens only once when power is turned on.



(c) The capacitor charges back to peak of input when the diode becomes forward-biased. This charging occurs during the portion of the input voltage indicated by the solid blue curve.

EL CAPACITOR SE CARGA RÁPIDAMENTE AL COMIENZO DE UN CICLO Y SE DESCARGA LENTAMENTE DESPUÉS DE UN CICLO POSITIVO.

LA VARIACIÓN EN EL VOLTAJE DE SALIDA DEBIDO A LA CARGA Y DESCARGA DEL CAPACITOR SE LLAMA VOLTAJE DE RIZADO (RIPPLE).

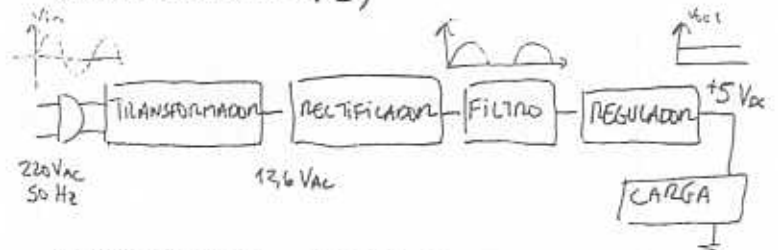


FIGURE 16-41
Half-wave ripple voltage (green line).

RIEZO

FIGURE 16-40
Operation of a half-wave rectifier with a capacitor-input filter.

FUENTE DE PODER DE CORRIENTE CONTINUA (DIRECT CURRENT - DC)



TRANSFORMADOR: CAMBIA EL VOLTAJE (REDUCE O SUBE) SEGÚN RAZÓN DE VUELTAS

RECTIFICADOR: CONVIERTE VOLTAJE ALTERNIO A VOLTAJE PULSANTE CONTINUO

FILTRO CAPACITIVO: ELIMINA LAS FLUCTUACIONES EN EL VOLTAJE RECTIFICADO Y PRODUCE UN VOLTAJE CONTINUO RELATIVAMENTE SUAVE

REGULADOR: MANTIENE UN VOLTAJE CONTINUO CONSTANTE ANTE VARIACIONES EN EL VOLTAJE DE ENTRADA O EN LA CARGA

DERIVADOR RC

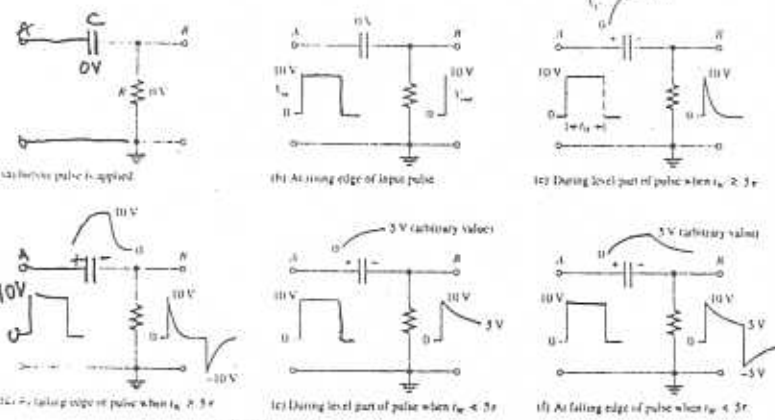


FIGURE 15-22

Examples of the response of a differentiator to a single-pulse input under two conditions: $\tau \geq 5T$ and $\tau < 5T$. A pulse generator is connected to the input, but the symbol is not shown, only the pulse.

APLICACIÓN 1 RETRAZOS DE TIEMPO

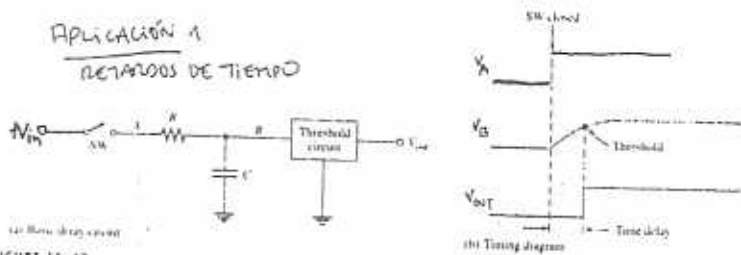


FIGURE 15-47
A basic time delay application of an RC integrator.

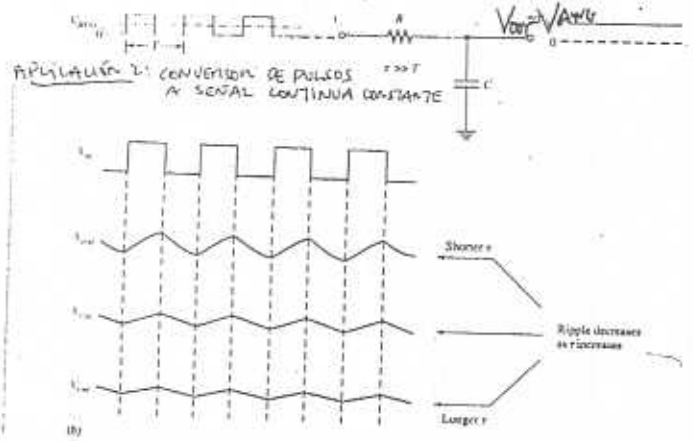


FIGURE 15-48

A long time constant integrator acts as a pulse-to-dc converter.

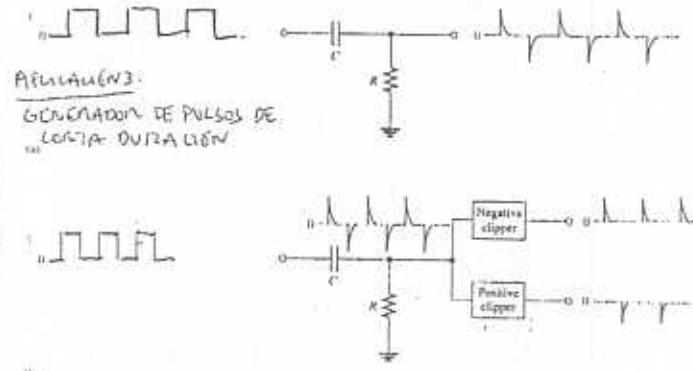


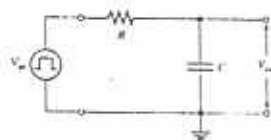
FIGURE 15-49

A very short time constant differentiator generates positive and negative spikes.

INTEGRADOR RC

FIGURE 15-1

An RC integrator with a pulse generator connected.



RÉGIMEN PERMANENTE SE ALCANZA DESPUÉS DE 5T

RESPUESTA DEPENDE DE RELACIÓN ENTRE CONSTANTE DE TIEMPO Y ANCHO DEL PULSO SI $\tau \gg 5T$ EL CAPACITOR SE CARGA Y DESCARGA INDEFINITAMENTE

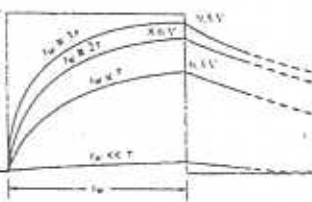


FIGURE 15-6

Capacitor voltage for various time constants that are longer than the input pulse width. Blue is input and green is output.

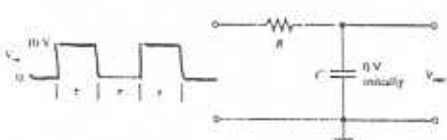


FIGURE 15-14

Integrator with a square wave input having a period equal to two time constants ($T = 2T$).



FIGURE 15-15

Input and output for the initially uncharged integrator in Figure 15-14.

CASO DE PULSOS REPETITIVOS CON RÉGIMEN TRANSITORIO

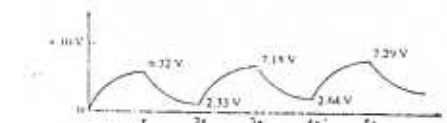


FIGURE 15-16

Output reaches steady state after $5T$.

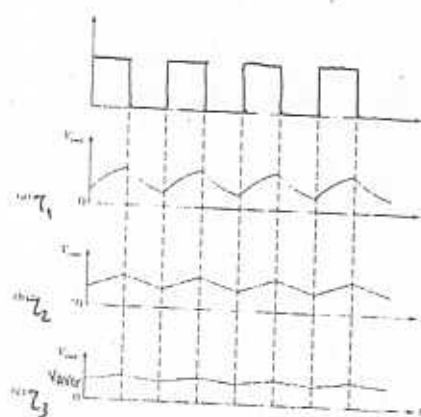


FIGURE 15-18

Effect of increasing time constants on the output of an integrator ($T_1 > T_2 > T_3$).

AL AUMENTAR LA CONSTANTE DE TIEMPO EL VOLTAGE DE SALIDA TIENDE AL VALOR MEDIO DE LA ENTRADA CON UN PEQUEÑO RIZADO

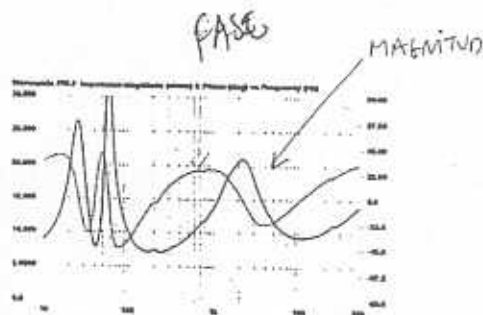
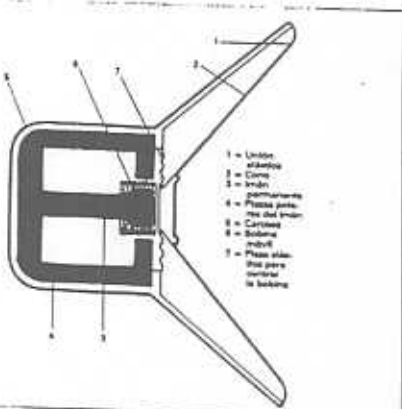
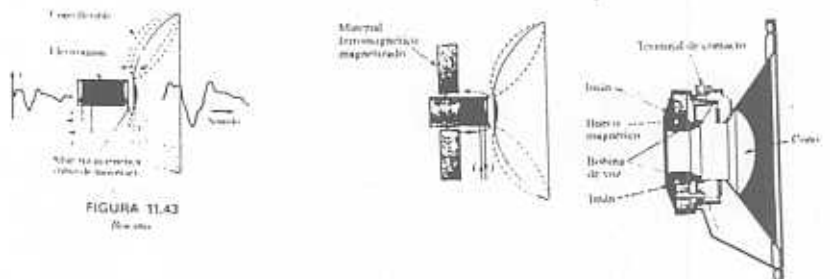
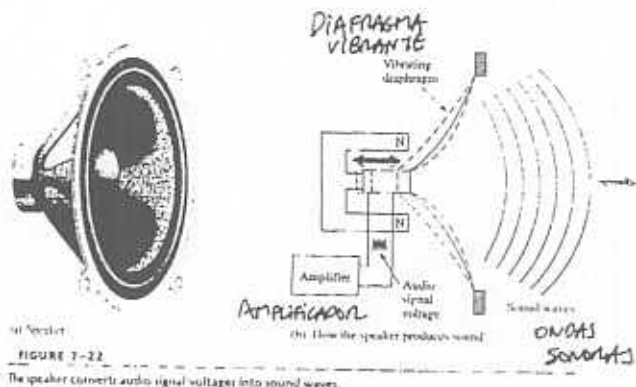
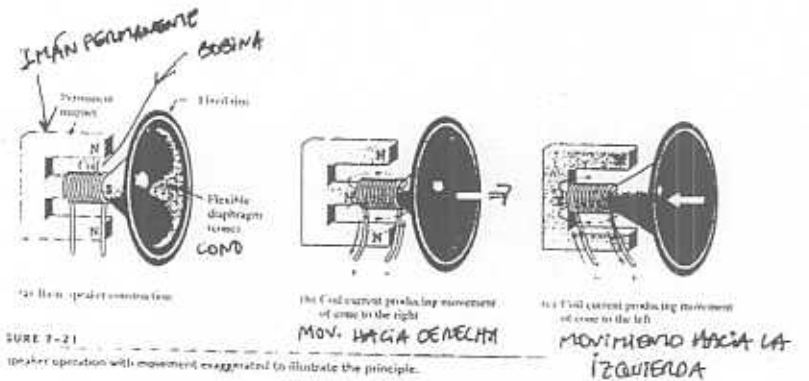
PARLANTES O ALTAVOCES

Transforman una señal eléctrica en onda de sonido. Son transductores electroacústicos que realizan su función mediante el movimiento mecánico de una membrana actuada por un procedimiento electromagnético (o bien electroestático o piezoeléctrico).

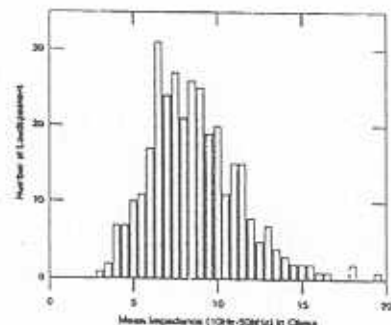
Los altavoces dinámicos consisten de una bobina móvil, imán permanente, cono (de cartón) y estructura de soporte.

La bobina es un electromagneto. Cuando circula una corriente a través de éste se crea un campo magnético alrededor de la bobina. El electromagneto y el imán permanente interactúan, polos diferentes se repelen y polos iguales se atraen. La corriente alterna cambia constantemente la fuerza entre los magnetos, empujando la bobina como un pistón hacia uno y otro lado.

Cuando la bobina se mueve, ésta hace vibrar un cono flexible o diafragma, lo que hace vibrar el aire frente al parlante y crea ondas sonoras.

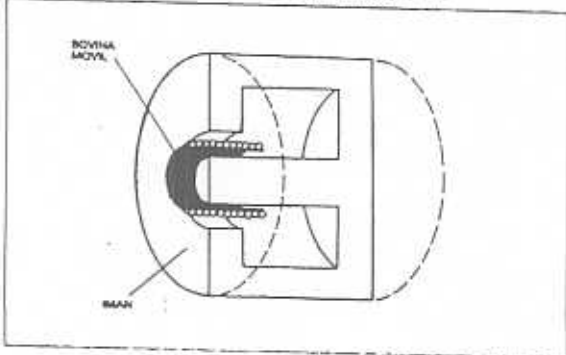


IMPEDANCIA ELECTRICA DE UN PARLANTE
VERSUS FRECUENCIA



IMPEDANCIA PROMEDIO DE 330 PARLANTE

Situación de la bobina móvil, inmersa en el campo magnético del imán.



Características de un parlante

1. Impedancia Eléctrica (Magnitud y fase)
2. Respuesta al Impulso y al Escalón
3. Respuesta de Frecuencia
4. Potencia

Impedancia Eléctrica

La impedancia es reactiva y varía con la frecuencia

$$Z_p = Z(\omega) \angle \phi(\omega)$$

A pesar de lo anterior los fabricantes definen una impedancia nominal, que corresponde a la magnitud promedio de la impedancia en el rango de frecuencias de interés.

Su magnitud promedio está típicamente entre 4 y 16 Ohms, y se modela generalmente como una resistencia. Pero la impedancia puede presentar una variación de $\pm 20\%$ de su valor nominal.

El valor de la impedancia tiene importancia como carga del amplificador. Si se modela al amplificador como una fuente de voltaje, entonces la impedancia del parlante define cuanta corriente se extrae del amplificador. Además el valor de la impedancia es importante para que exista máxima transferencia de potencia a la carga (el parlante).

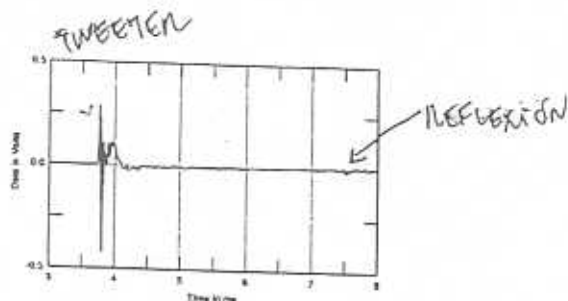
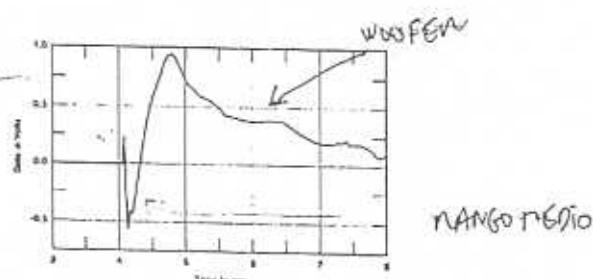


Fig.9 Typical loudspeaker impulse response.

RESPUESTA AL IMPULSO $h(t)$



RESPUESTA AL ESCALON $\Delta h(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$

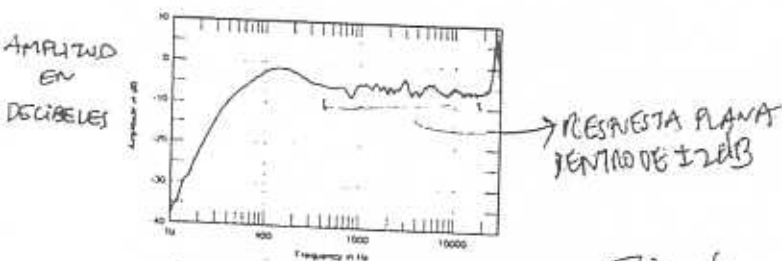


Fig.24 Typical MLS-derived response of a good-sounding loudspeaker at 50°, averaged across a 30 degree horizontal window on the tweeter axis, and spillover to the nearfield LF response.

Respuesta al Impulso y al Escalón

Mediante un método llamado MLS (Maximum Length Sequence) se presenta un tren de pulsos rectangulares pseudo-aleatorios al parlante. Se mide la respuesta con un micrófono ubicado entre 1 y 2 metros de distancia. Luego se hace la correlación entre ambas señales, para calcular la respuesta al impulso. Esta respuesta deber recortarse en 5ms para no considerar las reflexiones del sonido en las paredes de la pieza.

Como la respuesta al impulso es difícil de interpretar directamente, ésta se integra para obtener la respuesta al escalón. La aplicación de un escalón presenta problemas prácticos en este caso, ya que el parlante está diseñado para trabajar con una señal alterna. El efecto de una señal continua podría quemar el parlante.

Respuesta de Frecuencia

Corresponde a la transformada de Fourier (FT) de la respuesta al impulso, i.e.,

$$H(\omega) = F[h(t)]$$

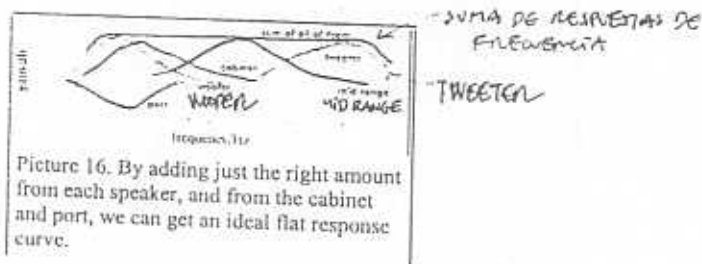
En la práctica se calcula a partir de la respuesta al impulso mediante el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) aplicado a ventanas de tiempo de la señal. Se grafica la magnitud versus la frecuencia y la fase versus la frecuencia. Un buen parlante tiene una respuesta de magnitud plana dentro de ± 2 dB (decibeles). Es decir tiene el mismo volumen (presión de sonido) para todas las frecuencias.

Las frecuencias audibles van de 20 Hz a 20kHz. ¿En que rango de frecuencias tiene un parlante una respuesta plana? Para alta fidelidad se usan múltiples altavoces, de modo que cada uno responda fielmente a una determinada banda de frecuencias. Un circuito llamado *crossover* (compuesto por ejemplo de inductancias y capacitores) descompone la señal de audio en distintas bandas de frecuencias.

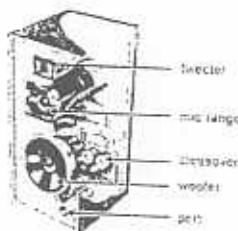
Woofer: Son altavoces de mayor diámetro y reproducen las frecuencias más bajas.

Mid-range: Cubre las frecuencias medias.

Tweeter: Tienen menor diámetro y reproducen las frecuencias más altas.



Picture 16. By adding just the right amount from each speaker, and from the cabinet and port, we can get an ideal flat response curve.



Picture 17. The overall sound is produced by exactly the right combination of the cabinet, the port, the tweeter, the mid range and the woofer.