CC3101 - Matemáticas Discretas **14 de agosto del 2012**

Auxiliar 2

Profesores : G. Navarro Auxiliares : A. Lizama, P. Muñoz

P1. Considere la siguiente afirmación, conocida como la paradoja del barbero:

> "En una ciudad existe un solo barbero. El barbero afeita a todos y solo a los hombres que no se afeitan a ellos mismos. Pregunta: ¿Quién afeita al barbero? "

Utilize la lógica de primer orden para explicar la paradoja del barbero.

P2. Se define el conectivo lógico NOR como sigue :

$$\sigma(NOR(x,y)) = 1 \Leftrightarrow \sigma(x) = 0 \land \sigma(y) = 0$$

es decir, la negación de la disyunción. Muestre que $\mathcal{FO}(NOR)$ es equivalente a $\mathcal{FO}(\neg, \land, \lor)$.

P3. Dado un conjunto de variables proposicionales $\mathcal{P}$, se definen los *literales* como variables en $\mathcal{P}$ o su negación. Un literal se dice *negativo* si es la negación de alguna variable de $\mathcal{P}$. En caso contrario, se dice *positivo*. Una clausula de Horn es una disyunción de literales en la que hay a lo más un literal positivo. Una fórmula de Horn es una conjunción de clausulas de Horn.

Demuestre que existe una fórmula en la lógica de primer orden que no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

P4. Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ esta formado por un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas $E \subseteq \binom{V}{2}$. Un conjunto $I \subseteq V$ se dice independiente si y sólo si

$$\forall u, v \in V \quad uv \notin E$$

Pruebe que para toda fórmula α en 3CNF, existe un grafo G tal que α es satisfacible si y sólo si G tiene un conjunto independiente I de tamaño al menos m, donde m es el número de clausulas de α.