CC3101-1 Matemáticas Discretas para la Computación : Semestre 2012-02.
Profesor: Gonzalo Navarro. **Auxiliares:** Antonio Lizama, Pablo Muñoz.

Auxiliar n°1

10 de agosto del 2012

P1. Muestre que existen Σ y α tal que $\Sigma \not\models \alpha$ y $\alpha \not\models \Sigma$.

P2. Sea Σ un conjunto de oraciones. Σ se dice *insatisfacible* si en ninguna de sus filas todas las oraciones son verdaderas.

a) Demuestre que $\Sigma \models \alpha$ si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

b) Demuestre que Σ es insatisfacible si y solo si $(\forall\alpha)(\Sigma \models \alpha)$.

c) Demuestre que $\Sigma \models (\alpha \Rightarrow \beta)$ si y solo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

d) Demuestre que si $\Sigma \models \alpha$ entonces $(\forall\beta)(\Sigma \cup \{\beta\} \models \alpha)$.

P3. Sea $\Sigma \subseteq L(P)$, con $|P| = \infty$. Σ se dice *finitamente satisfacible* si todo subconjunto finito de él es satisfacible. Sea $p \in P$. Muestre que si Σ es finitiamente satisfacible, entonces $\Sigma \cup \{p\}$ es satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg p\}$ es satisfacible.

Solución

Sea p una predicado con variables en P. Suponga, en búsqueda de una contradicción, que Σ es finitamente satisfacible y ni $\Sigma \cup \{p\}$ ni $\Sigma \cup \{\neg p\}$ son satisfacibles. Como no son satisfacibles, existen Θ_1, Θ_2 finitos, $\Theta_1 \subseteq \Sigma \cup \{p\}$, $\Theta_2 \subseteq \Sigma \cup \{\neg p\}$ que no son satisfacibles.

Dado que Σ es finitamente satisfacible, sigue que $p \in \Theta_1$, $\neg p \in \Theta_2$. Sean $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2$ dados por

$$\tilde{\Theta}_1 = \Theta_1 \setminus \{p\} \qquad \tilde{\Theta}_2 = \Theta_2 \setminus \{\neg p\}$$

Como $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2 \subseteq \Sigma$ son finitos, en particular, $\tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2 \subseteq \Sigma$ es finito, por tanto existe $\sigma(\cdot)$ evaluación tal que

$$\sigma(\tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2) = 1$$

Si $\sigma(p) = 1$, entonces $\sigma(\Theta_1) = \sigma(\tilde{\Theta}_1 \cup \{p\} = 1$, lo que es una contradicción puesto que Θ_1 no es satisfacible. De la misma manera, si $\sigma(p) = 0$, entonces $\sigma(\Theta_2) = 1$, lo que contradice Θ_2 insatisfacible. Se concluye el resultado.

P4. Una fórmula $\alpha(x_1, ..., x_n)$ está en formato CNF si es de la formato

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i \quad C_i = \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \qquad l_i^j \in \{x_1, \neg x_1, ..., x_n, \neg x_n\}$$

Una fórmula es 3CNF si es CNF y $(\forall i)(n_i = 3)$. Muestre que si α es CNF entonces existe una fórmula β 3CNF tal que α es satisfacible si y solo si β es satisfacible.

Solución

La idea es ver que cada clausula por separado de α se puede convertir a una en 3CNF que satisface lo pedido.

- **Caso 1** Clausula de tamaño < 3

  Si $C_i = (l_{i,1})$, basta tomar la clausula $\tilde{C_i} = (l_{i,1} \vee l_{i,1} \vee l_{i,1})$ la cual es equivalente a C_i.

  Si $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2})$, basta tomar la clausula $\tilde{C_i} = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,2})$ la cual es equivalente a C_i.

- **Caso 2** Clausulas de tamaño ≥ 4. Probaremos la siguiente proposición por inducción:
  $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4)(\exists \beta \in \text{3CNF})$ tal que $(l_{i,1} \vee ... \vee l_{i,n})$ es satisfacible si y solo si β es satisfacible.

  Caso base Si $n = 4$, $C = (l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4)$. Basta tomar $\tilde{C} = (l_1 \vee l_2 \vee z) \wedge (l_3 \vee l_4 \vee \neg z)$. En efecto:

  Si C no es satisfacible, toda evaluación hace falsos todos los literales $l_1, ..., l_4$, reduciendo el valor de verdad de $\tilde{C}$ a $z \wedge \neg z$, la cual no puede ser verdadera.

  Si C es satisfacible, existe una evaluación que hace verdadera alguna de los literales. Suponga sin perdida de generalidad que l_1 es verdadero, basta entonces tomar $z = 0$ para satisfacer $\tilde{C}$. En general, se necesita tomar $z = 1$ si el literal verdadero esta en la 2da clausla de $\tilde{C}$, y $z = 0$ si el literal verdadero esta en la 1era clausula.

  Caso general

  Si $n > 4$, $C = (l_1 \vee ... \vee l_n)$, basta tomar $\tilde{C} = (l_1 \vee l_2 \vee z) \wedge (l_3 \vee ... \vee l_n \vee \neg z)$. Se puede demostrar de la misma manera que C es satisfacible si y solo si $\tilde{C}$ es satisfacible. Además, la segunda clausula de $\tilde{C}$ tiene tamaño $(n - 2) + 1 = n - 1$. Se concluye por inducción el resultado.