

INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN Y EL ANÁLISIS DE SISTEMAS

Manuel A. Duarte Mermoud
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Casilla 412-3, Santiago
CHILE

Resumen En este capítulo se analizan los conceptos básicos del análisis y la modelación de sistemas entregando la motivación para el estudio de tópicos posteriores.

1. INTRODUCCION

1.1 Conceptos básicos y objetivos del Análisis de Sistemas

Todas aquellas disciplinas de la actividad humana que se fundamentan en conceptos y desarrollos científicos operan en un constante accionar entre la abstracción y realización práctica. El objeto actual de tal accionar se llama proceso, y su abstracción sistema.

A pesar de que la relación entre sistema y proceso es íntima, ésta no es única. En efecto, para un proceso determinado existen diversas representaciones de sistemas dependiendo de los objetivos de la abstracción. Por ejemplo, un hombre puede ser considerado indistintamente por la Sociología, la Psicología o la Medicina.

La abstracción descrita, particularizada a un objetivo determinado, se llama análisis cuando se viene desde la realidad, y síntesis cuando se va hacia ella.

Cada una de las unidades básicas interactuantes de un sistema se llama elemento, y cada reunión de estos elementos que presente propiedades definidas y características en relación al análisis se llama subsistema.

Un sistema se dice abierto cuando algunos de sus elementos interactúan con elementos externos a él. Se dice cerrado si no ocurre tal cosa. En realidad, no existen sistemas cerrados salvo el Universo completo. Si fuera necesario para fines prácticos la frontera del sistema se puede extender lo suficiente como para considerarlo cerrado y dejar solo interacciones débiles entre el interior y el exterior. En general un sistema puede definirse como una colección de objetos relacionados entre sí por alguna forma de interacción o interdependencia.

Un sistema está dotado de ciertos atributos que lo caracterizan, los cuales pueden ser medibles o no medibles. A un atributo medible puede asignarse un número o un conjunto de números, reales o complejos. Ejemplos de atributos medibles son: longitud, masa, densidad, velocidad, fuerza, impedancia, admitancia, temperatura, momento de inercia, etc. Atributos no medibles son: la belleza, el sabor, el aroma, etc.

El estudio del comportamiento de los atributos medibles de un sistema puede realizarse ya sea experimentando con el sistema o en base a un modelo. En la práctica se dan muchos casos en los cuales la experimentación directa no es posible, y el análisis mediante modelos es más conveniente. Resulta de interés entonces

formularse algunas preguntas básicas destinadas a obtener un modelo de un determinado sistema.

De la definición dada anteriormente puede desprenderse que un sistema está compuesto de objetos. ¿Cuáles son ellos? Dependiendo del sistema, puede tratarse de resistencias, condensadores, masas, resortes, etc.

Según el objetivo que se persigue con el análisis y según el medio en que se considera el sistema, los atributos de este pueden dividirse en relevantes e irrelevantes. Los atributos relevantes serán aquellas variables del conjuntos de atributos mencionados que nos interesan según nuestro objetivo particular. Los atributos irrelevantes serán aquellos que en nada influyen en lo que deseamos determinar. Por ejemplo, si se desea estudiar el comportamiento de un sistema mecánico masa-resorte sometido a una fuente de energía calórica, interesarán atributos como flujos calóricos, temperaturas, superficies, tipos de materiales. Si, en cambio, se desea estudiar el tiempo que demora en recorrer una cierta trayectoria, son relevantes posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas ejercidas.

La definición de sistema presume la existencia de relaciones provenientes de leyes físicas, cuya aplicación constituye, en la mayoría de los casos, aproximaciones de la realidad. ¿Qué relaciones existen entre los atributos relevantes de cada objeto del sistema? Por otra parte, ¿Qué relaciones existen entre los atributos de los diferentes objetos que componen el sistema, esto es, cuáles son las relaciones que representan las interacciones entre los objetos? En el primer caso se trata, por ejemplo, de relaciones del tipo voltaje-corriente en una resistencia o bien fuerza-aceleración en una masa, mientras que las relaciones de interacción pueden ejemplificarse con las ecuaciones de nodos en una red eléctrica. Al representar los atributos relevantes (medibles) por variables definidas en el tiempo, las relaciones existentes se traducen en un conjunto de ecuaciones matemáticas. Este conjunto constituye el modelo matemático del sistema válido para ciertas condiciones muy específicas. Cabe destacar que al variar las condiciones (objetivos, medio) cambian las relaciones y en consecuencia varía el modelo. Un sistema físico presenta entonces varios modelos, los cuales difieren tanto en el rango de validez como en el grado de aproximación con que reflejan la realidad.

En el ámbito de la Tecnología, y paralelamente de la Ingeniería, los sistemas están orientados hacia tres objetivos claramente distintos:

i) Diseño de nuevos procesos:
Esto es, determinación de interrelaciones entre diversas unidades y elementos para satisfacer una necesidad

vigente. Por ejemplo, diseño de un automóvil que desarrolle velocidad normal de 80 Km/hr., y cuyo rendimiento sea superior a 18 Km/lt. de combustible a esa velocidad.

ii) Optimización de procesos existentes:

Este es el caso de procesos que fueron diseñados con una tecnología que no posea las herramientas y/o equipos actuales, o procesos cuya relación de variables ha sido modificada por envejecimiento o deterioro. También es el caso de un proceso que fue diseñado para satisfacer requerimientos menos estrictos que los actuales.

iii) Control de procesos:

Se refiere a la necesidad de manejar las relaciones entre las variables del sistema que garantice un comportamiento determinado de éste. El control de procesos se aplica tanto a sistemas nuevos como existentes.

1.2 Variables de un sistema

Las variables asociadas a los atributos de un sistema pueden dividirse, en primera instancia, en variables externas e internas. Dentro de las primeras se pueden distinguir entradas, salidas y perturbaciones, y dentro del segundo tipo se tienen variables de estado, parámetros y perturbaciones.

Las entradas son variables que pueden ser modificadas en forma directa por un experimentador (entradas propiamente dichas o variables manipuladas) o que cambian por efecto del medio externo al sistema (perturbaciones). Las entradas son la causa de la evolución del sistema.

Las salidas son variables que cambian como resultado de la variación de las entradas, y que pueden ser observadas pero no variadas en forma directa por el experimentador. Se dividen en salidas propiamente dichas (variables en las que el experimentador está interesado) y en salidas suprimidas o variables internas, las cuales sirven generalmente para relacionar entradas y salidas propiamente dichas.

Los parámetros son variables asociadas a atributos que son intrínsecos del sistema (resistencia, masa, volumen, etc.).

Las variables que describen la evolución del sistema y relacionan entradas y salidas se denominan variables de estado.

Eventualmente, en algunos sistemas se pueden encontrar perturbaciones internas.

1.3 Representación esquemática de un sistema

Variables externas:

- Variables de entrada (U) (causa o estímulo)
- Variables de salida (Y) (efecto o respuesta)
- Perturbaciones (W)

Variables internas:

- Parámetros (P)
- Variables de estado (X)
- Perturbaciones (Z)

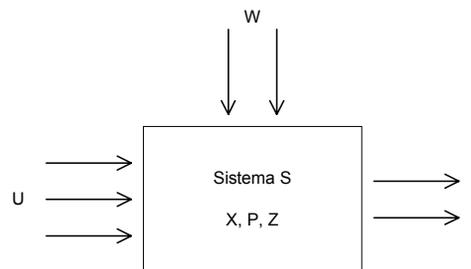


Figura 1. Representación esquemática de un sistema.

Ejemplo: Sea el circuito que se muestra en la Figura 2 cuyo comportamiento está descrito por las leyes de Kirchhoff y los supuestos básicos de la teoría de circuitos.

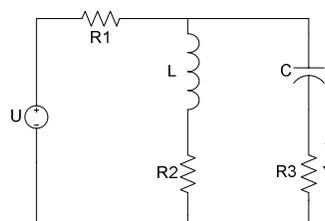


Figura 2. Circuito eléctrico.

Aquí el proceso es el circuito físico mismo constituido por la fuente de tensión, las resistencias, la bobina, el condensador, los conductores, las aislaciones, las conexiones, etc. Sistema es la reunión cualificada y cuantificada de las propiedades y características de las unidades del proceso y sus correspondientes interacciones, todo esto bajo la perspectiva de un objetivo determinado, que puede ser por ejemplo mantener una tensión sinusoidal de 50 Hz en R_3 de modo que su amplitud sólo fluctúe entre 10 y 12 Volts.

En este sistema así definido, se tiene la siguiente clasificación de variables:

- i) Entrada
 - U: Tensión de la fuente de poder.
- ii) Salida
 - Y: Caída de tensión en R_3 .
- iii) Parámetros
 - R_1, R_2, R_3 : Valores de las resistencias.
 - L, C: Valores de la inductancia de la bobina y la capacidad del condensador.
- iv) Variables de estado
 - X_1 : Corriente por la bobina (i).
 - X_2 : Caída de tensión en el condensador (v).
- v) Perturbaciones
 - Ondas electromagnéticas captadas por los conductores, bobina y condensador; variaciones de la tensión de la fuente de poder por variación de tensión desde la red de alimentación, etc.

1.4 Clasificación general de sistemas

Los sistemas físicos pueden clasificarse de acuerdo a diversos criterios, como por ejemplo, la naturaleza de los parámetros, la naturaleza de las variables, el dominio de definición de las variables. En lo que sigue se revisarán algunas de estas clasificaciones; en este contexto se

considerarán "modelo" y "sistema" como conceptos equivalentes.

Los sistemas en general se dividen en dos grandes grupos desde el punto de vista de su origen:

i) Sistemas naturales: Su existencia es independiente de la acción del hombre. Como ejemplos se tiene al sistema planetario solar, el ciclo del agua, el cerebro humano, el sistema molecular, etc. Los sistemas naturales son el campo de acción preferente de los científicos.

ii) Sistemas artificiales: Son aquellos hechos por el hombre. Estos sistemas buscan transformar la naturaleza para satisfacer las necesidades vitales del ser humano y la sociedad. Algunos ejemplos son sistemas de generación y transmisión de energía eléctrica, sistemas de televisión, plantas procesadoras de minerales, redes de telefonía, etc. Los procedimientos involucrados en estos sistemas estructuran la tecnología y de finen el campo de acción preferente de ingenieros y técnicos.

Desde el punto de vista de la naturaleza de los procesos los sistemas se clasifican en:

i) Sistemas determinísticos: Son aquellos cuya evolución está descrita por variables cuya cuantificación es exacta, estas están totalmente determinadas para todo instante de tiempo t , la salida viene determinada en forma única a partir de la entrada y de las condiciones iniciales. Por ejemplo, sistemas mecánicos desde el punto de vista de la física clásica.

ii) Sistemas aleatorios: En estos sistemas su evolución está descrita por variables a las cuales hay asociadas funciones de densidad de probabilidad, como por ejemplo, la fuerza ejercida por el viento sobre una antena. En éste no es posible determinar la salida en función de la entrada y de las condiciones iniciales. Como ejemplos de sistemas estocásticos tenemos la cantidad de vehículos que circulan por una intersección de calles y también un sistema de electrones orbitando un núcleo atómico.

Por otra parte, haciendo referencia a la clasificación de variables de un sistema, se distinguen:

i) Sistemas monovariantes: Son aquellos en los cuales hay una sola entrada y una sola salida.

ii) Sistemas multivariantes: Estos poseen más de una entrada y/o más de una salida.

Según las características de continuidad de las variables, los sistemas se pueden clasificar en:

i) Sistemas de variable continua: En estos sistemas las variables pueden tomar todos los valores de un conjunto de valores posibles, como ocurre en el indicador de gasolina de un automóvil, en el cual la posición de la aguja puede variar idealmente en forma continua entre las posiciones vacío y lleno.

ii) Sistemas de variable discreta: Son aquellos en que las variables pueden adquirir sólo ciertos valores. Este es el caso de un semáforo o de los segundos de un reloj eléctrico que salta bruscamente de una posición a otra con intervalos de un segundo.

Según las características de continuidad del tiempo, los sistemas se pueden clasificar en:

i) Sistemas de tiempo continuo: En estos las variables están definidas en todos instantes del intervalo de observación, como es el caso de las variables analógicas. Estos sistemas dan origen a modelos constituidos por ecuaciones diferenciales.

ii) Sistemas de tiempo discreto: En este tipo de sistemas las variables están definidas sólo en algunos instantes o subintervalos. Los modelos son del tipo de ecuaciones de diferencia.

Dependiendo del comportamiento espacial de las variables tenemos que los sistemas se clasifican en:

i) Sistemas de variables concentradas: Son aquellos en que los atributos no dependen de las coordenadas espaciales, sino que se suponen concentrados en un punto del espacio y sólo dependen del tiempo. Los sistemas de parámetros concentrados (de tiempo continuo) conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias. Ejemplos de estos sistemas son las redes eléctricas de baja frecuencia. Consideremos el caso de un horno, en el que se requiere de la temperatura para su control posterior. Podemos hacer la aproximación de considerar que la temperatura en el interior del horno es uniforme. En este caso, dicho atributo evolucionará en función del tiempo de acuerdo con la entrada a la que el sistema se vea sometido (por ejemplo la cantidad de combustible suministrado).

ii) Sistemas de variables distribuidas: En estos los atributos varían con la posición. Estos sistemas conducen a ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, como por ejemplo, en una línea de transmisión eléctrica. En el caso del horno, si en lugar de efectuar dicha aproximación, consideramos que la temperatura puede ser diferente en los distintos puntos del horno, nos encontraremos con un atributo que además de variar en función del tiempo, variará según la posición del punto considerado.

Dependiendo del comportamiento temporal de las propiedades del sistema (de los parámetros) tenemos:

i) Sistemas invariantes en el tiempo: Son aquellos cuyas propiedades características, los parámetros, no se modifican con el transcurso del tiempo, es decir, no dependen del tiempo. Es el caso de una masa o de la constante de un resorte en un sistema mecánico.

ii) Sistemas variables en el tiempo: Es aquel cuyas propiedades o características (parámetros) se modifican con el tiempo. Ejemplo de estos sistemas es un cohete, cuya masa varía debido al consumo de combustible.

Tomando en cuenta la realizabilidad de un sistema:

i) Sistemas causales: Un sistema es causal si la salida en el instante t depende de la entrada para $t' \leq t$. Todos los sistemas físicos son causales.

ii) Sistemas anticipativos: Son aquellos que no son causales. Solo cierto tipo de sistemas abstractos son anticipativos. El sistema modelado por

$$y(t) = u(t + T) \quad T > 0$$

con u la entrada, y la salida, constituye un ejemplo de sistema anticipativo.

Con respecto a la linealidad de las variables tenemos:

- i) **Sistemas lineales:** Son aquellos que al ser excitados por una combinación lineal de entradas producen como salida la misma combinación lineal con las salidas correspondientes a las entradas en forma aislada. Un ejemplo de estos sería cualquier circuito eléctrico pasivo según la teoría de redes.
- ii) **Sistemas no lineales:** Simplemente son aquellos que no son lineales. Como ejemplo tenemos el péndulo simple.

Finalmente, se pueden distinguir dos categorías más de sistemas.

- i) **Sistemas sin memoria:** Son aquellos en que las salida en el instante t depende sólo de la entrada en aplicada en el instante t, tal como ocurre en una resistencia eléctrica. Estos sistemas están descritos por ecuaciones algebraicas.
- ii) **Sistemas con memoria:** En ellos, la salida en el instante t depende de la entrada aplicada entre $-\infty$ y t, o dicho de otra manera, de la entrada entre 0 y t y de ciertas condiciones iniciales (variables de estado en t=0), como en el caso de un condensador o una bobina. Estos sistemas quedan descritos por ecuaciones diferenciales o de diferencia.

1.5 Metodología general del análisis de procesos

Cualquiera sea el campo específico sobre el que se aplique el análisis de procesos como disciplina, este se lleva a cabo mediante una metodología bien precisa que es consecuencia directa del método científico, cuyo algoritmo básico es el siguiente.

- i) Definición del problema (y por lo tanto del objetivo).
- ii) Reunión de información.
- iii) Análisis.
- iv) Síntesis.
- v) Realización, implementación y toma de decisiones.

En el caso del análisis de procesos (análisis de sistemas), los pasos más significativos y nítidos de esta metodología son:

1) **Modelación:**
 Este es un proceso de representación del proceso bajo la perspectiva de los objetivos del estudio. Se obtiene un ente denominado modelo; existen distintos tipos de modelos dependiendo del medio de representación:

- i) **Modelos Matemáticos:** Son una representación matemática del proceso y están descritas por sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales. En la ciencia estos modelos constituyen las leyes y las hipótesis actuales; ejemplo: ley de Ohm, ecuaciones de Maxwell para el comportamiento de las ondas electromagnéticas, modelo de estructura atómica de la materia; los modelos matemáticos tienen un rango de validez más restringido y son consecuencia de la aplicación directa de los modelos científicos y de hipótesis simplificadoras

consecuentes con los objetivos del análisis; ejemplos: modelo de un motor de inducción, modelo dinámico de una estructura (por ejemplo una viga), modelo de un intercambiador de calor, modelo de un reactor nuclear, etc. El procedimiento de modelación matemática se denomina frecuentemente identificación.

- ii) **Modelos Físicos:** Estos constituyen una representación física a escala del proceso en cuestión. Por ejemplo, las maquetas usadas en la construcción y el diseño de edificios, aviones, barcos, cohetes, etc.

- iii) **Modelos analógicos:** Estos modelos se basan en que dos procesos distintos pueden tener patrones de comportamiento similares bajo ciertas condiciones de trabajo. Por ejemplo un circuito eléctrico según la teoría de redes lineales y un circuito mecánico también lineal. Entonces, se dice que uno es el modelo analógico del otro. Evidentemente, ambos tienen el mismo modelo matemático.

2) **Estimación de parámetros del modelo:**
 Una vez determinada la estructura del modelo es preciso calcular sus parámetros. Este procedimiento de cálculo se denomina estimación y se hace en base a la información disponible de las variables de entrada y salida del sistema; eventualmente también se dispone de datos de variables internas lo que mejora la estimación. El proceso de estimación es normalmente un proceso de ajuste entre la salida del proceso real y la salida del modelo, ambas para una misma entrada. (Ver Figura 3).

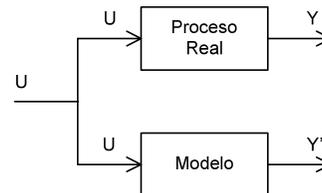


Figura 3. Estimación de parámetros.

Una de las técnicas más usadas en la simulación es el ajuste por mínimos cuadrados; según este criterio los valores de los parámetros del modelo son aquellos que minimizan la siguiente función criterio:

$$J = \sum_{i=1}^k |y_i - y'_i|^2$$

donde :

- k : Número de observaciones hechas.
- y'_i : evaluación de la salida del modelo para los datos del estado tomando la i-ésima observación, entrada U y parámetros P. La expresión algebraica que determina su valor es:

$$y'_i = A(X, U, P)$$

- y_i : salida del proceso real en la i-ésima observación con entrada U.

3) **Simulación:**
 Teniendo el modelo y sus correspondientes parámetros ya calculados, dentro del contexto del análisis de procesos, procede la evaluación de su comportamiento para diversos valores de variables y/o parámetros. Este proceso se denomina simulación. Debido a la complejidad inherente a la estructura de muchos

modelos y al volumen de información que es preciso manejar, es necesario introducir en la simulación el uso de computadores tanto analógicos como digitales (y también híbridos).

Es conveniente citar aquí una serie de ventajas que presenta la simulación como herramienta de análisis de procesos:

i) Experimentación: Se puede estudiar procesos existentes; más rápido, económica y exhaustivamente que en la planta real. Se puede comprimir y expandir el tiempo real.

ii) Extrapolación: Con adecuados modelos matemáticos es posible examinar los extremos de los rangos de las variables de operación (lo que a veces es imposible en la planta real). Se puede establecer patrones críticos de comportamiento.

iii) Estudio de conmutabilidad y evaluación de políticas alternativas: Pueden introducirse nuevos factores o elementos y examinar el comportamiento de la planta para ver si esos cambios son compatibles y provechosos. Es posible comparar varios diseños y procesos no aún en operación y verificar las hipótesis antes de actuar.

iv) Análisis de sensibilidad: Se puede examinar sensibilidad con respecto a parámetros básicos y de costo del sistema. Permite también hacer análisis de sensibilidad para determinar configuraciones de control.

v) Optimización: Permite determinar una adecuada relación de variables del proceso de modo que se garantice un comportamiento óptimo según un criterio determinado.

vi) Estudio de estabilidad: Se puede estudiar la estabilidad del sistema (y de los subsistemas) frente a variaciones de condiciones de operación y perturbaciones.

4) Evaluación:

Finalmente, es necesario evaluar el proceso completo seguido en el análisis de procesos, proponiendo modificaciones al mismo e iterando nuevamente, o proponer las soluciones más adecuadas para el proceso bajo estudio.

1.6 Comportamiento estático y dinámico de un sistema

Los objetivos que condicionan la idealización de un proceso pueden corresponder tanto a un interés por determinar una simple relación de sus variables o, más que eso, a determinar el comportamiento de ellas a través del tiempo. En el primer caso, las variaciones temporales no interesan o son despreciables para efectos prácticos, y en el segundo caso estas variaciones se tornan significativas.

Entonces, cuando el sistema presenta una evolución a través del tiempo se dice que el sistema tiene un comportamiento dinámico. Si no es así, y sólo corresponde a una relación de variables independientes del tiempo, se dice que el sistema tiene un comportamiento estático.

Un sistema puede presentar ambos comportamientos aunque no simultáneamente. En este caso, al comportamiento dinámico se le denomina régimen transitorio y al estático régimen permanente o estado estacionario.

En rigor no existen sistemas estáticos. Siempre hay movimiento y variación de variables. Esto se refleja en que la entropía nunca decrece. Sin embargo, para fines prácticos ciertos sistemas pueden considerarse estáticos.

Por otra parte, en la práctica, señalados determinados objetivos, es a veces realmente difícil distinguir entre un comportamiento dinámico y uno estático. No obstante, ambos comportamientos presentan en general dos grandes diferencias:

i) En el caso estático la relación entre la entrada y salida se mantiene para distintos valores de entrada. En el caso dinámico esto rara vez se cumple.

ii) El valor de la salida solo depende del valor de la entrada en el caso estático. En el caso dinámico, solo una parte de la salida depende de la entrada; la otra depende del estado del sistema.

Cuando un sistema esta en estado estacionario se denomina punto de operación al conjunto de valores de variables que caracterizan ese estado. Normalmente, el estudio del comportamiento dinámico de un sistema se hace en torno a un punto de operación; esto permite obtener, bajo determinadas circunstancias aproximaciones para facilitar el análisis.

De aquí en adelante, salvo que se indique lo contrario, se estudiará el comportamiento dinámico de los sistemas.

2. MODELOS PARA PROCESOS

La construcción de un modelo no es siempre un proceso fácil. Para empezar, exige un determinado conocimiento del proceso en estudio. Exige también, abstraer relaciones entre las variables, manipular esas relaciones y finalmente procesar cierta cantidad de información.

Si además, el proceso en cuestión tiene varias unidades es recomendable dividir al sistema en subsistemas haciendo modelos parciales los que luego se interconectan convenientemente de modo de representar el proceso.

La confección del modelo es de naturaleza adaptativa. Esto permite generar un modelo que represente un compromiso entre una adecuada descripción del proceso (fidelidad) y que posea una estructura que sea compatible con las técnicas actualmente conocidas y con los medios (herramientas) disponibles (en cuanto al nivel de complejidad).

Un paso importante dentro del proceso de modelación es establecer las hipótesis simplificadoras; estas se hacen en virtud de los objetivos que se persiguen y teniendo en cuenta las características del proceso; es importante entonces justificar estas hipótesis para obtener modelos adecuados en esas condiciones.

Es conveniente citar aquí ciertas precauciones que es preciso tomar en el proceso de modelación:

a) Disponibilidad y exactitud de datos. Es necesario dejar bien establecido los tipos de datos disponibles, así como su calidad y cantidad. Hay que estudiar la forma en que se recolectan y en particular deben considerarse las condiciones de operación. Hay que analizar la posibilidad de colocar filtros a los datos.

b) Características de las herramientas disponibles para trabajar las expresiones matemáticas que componen el modelo. Hay que considerar tanto las limitaciones matemáticas (por ejemplo, resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales) como computacionales (capacidad de memoria, tiempo, etc.)

c) No debe asignársele a los modelos una validez general que no poseen. Un caso típico es la extensión fuera de los rangos de variables en que fue confeccionado; esto es solo posible hacerlo bajo situaciones muy especiales. No debe asignársele validez a priori a un modelo. Debe confrontárselo repetidamente con la realidad.

2.1 Técnicas de Modelación

Existen básicamente dos categorías de procedimientos para obtener la estructura del modelo de un proceso y cuya aplicabilidad depende del conocimiento de éste, de la información disponible y del acceso a las variables internas.

i) Métodos empíricos:

Consisten en excitar el proceso con entradas conocidas, luego medir las salidas (y aquellas variables internas que sean accesibles) y finalmente correlacionar tales entradas y sus respuestas respectivas. Este tipo de métodos se aplica preferentemente cuando se conoce muy poco respecto del proceso o cuando se tiene solo acceso a las entradas y salidas del sistema. El estudio de sistemas en tales condiciones mediante este tipo de técnicas se conoce como el análisis de "cajas negras". Las entradas características en este tipo de métodos son: impulso, pulso, tren de pulso, onda sinusoidal, escalón, rampa. La elección de las formas de entrada y de sus parámetros (como por ejemplo amplitudes y períodos) debe ser hecha teniendo en cuenta ciertas características del proceso como son su rango de comportamiento lineal (si es que lo tiene), su tiempo característico de respuesta (por ejemplo, un circuito eléctrico responde en segundos, un sistema térmico en minutos u horas, etc.), y el tipo de modelo que se desea obtener (lineal, no lineal, de parámetros concentrados o distribuidos, etc.). El uso de técnicas empíricas en la modelación, aunque no se requiere un mayor conocimiento del proceso, si exige un buen dominio de las herramientas matemáticas para procesar la información obtenida (por ejemplo estadística, transformaciones de Laplace y Fourier, etc) y de elementos de análisis de sistemas.

ii) Métodos Analíticos:

Estos métodos se basan en el proceso de abstracción (idealización), suponen un cabal conocimiento del proceso en estudio y se traducen en una serie de relaciones entre las variables internas y externas del sistema.

Existen dos tipos de métodos analíticos basados en distintos principios.

1) Métodos basados en las leyes de conservación.

Bajo ciertas condiciones específicas del proceso, ciertas propiedades de éste se conservan en su evolución. Esta constancia da lugar a ecuaciones de balance en un cierto instante y lugar determinado del espacio (ver ecuaciones (1) y (2)). Las ecuaciones de balance más usadas están basadas en la conservación de la energía, de la masa, de la cantidad de movimiento y de la carga eléctrica. La forma general que toman los balances de una propiedad X en el sistema en un cierto instante de tiempo está determinada por la siguiente ley: la acumulación de X en el sistema es igual a la entrada neta de X en el sistema más la generación neta de X en el sistema. Por su parte, la entrada de X en el sistema está definida como la entrada de X menos la salida de X , y la generación neta de X está definida como la generación de X menos la desaparición de X .

Sean:

$F(t)$: Flujo neto de entrada de X al sistema.

$G(t)$: Velocidad de generación de X en el sistema.

Δt : Intervalo en el que se considera acumulación.

entonces

$$X(t + \Delta t) - X(t) = F(t)\Delta t + G(t)\Delta t$$

Haciendo tender Δt a cero, bajo los supuestos de continuidad de funciones involucradas se tiene:

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t) + G(t) \quad (1)$$

Esta ecuación es muy significativa pues señala que, cualquiera que sea el proceso, éste puede ser descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con respecto al tiempo.

Existen dos maneras de aplicar las ecuaciones de balance correspondiente :

a) Ley de conservación macroscópica.

El proceso en cuestión se caracteriza por tener propiedades globales que no presentan variaciones parciales. Así entonces F y G son sólo funciones del tiempo y la ecuación (1) es sólo una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El modelo obtenido corresponde a un sistema de parámetros concentrados.

b) Ley de conservación microscópica.

En este caso el balance descrito anteriormente se realiza en un elemento de volumen dV , resultando dependencia espacial de F y G . Estos balances dan lugar a un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales tanto con dependencia espacial como temporal. Tales modelos corresponden a un sistema de parámetros distribuidos de la forma:

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} = F(z, t) + G(z, t) \quad (2)$$

Un típico resultado de la aplicación de las ecuaciones de balance son las ecuaciones de continuidad.

La elección entre la aplicación de una ley macroscópica o microscópica a un proceso determinado depende de la utilidad del modelo resultante.

Es interesante hacer notar que el comportamiento estático del sistema (régimen permanente) se obtiene anulando las dependencias temporales en la ecuación (1), esto es:

$$\frac{dX(t)}{dt} = 0$$

$$F(t) = F_e, G(t) = G_e$$

2) Métodos basados en el principio de mínima acción. Según este principio que nació con la mecánica clásica, todo proceso está caracterizado por una función definida como:

$$L(x, \dot{x}, t) \text{ con } x \in \mathfrak{R}^n$$

y su evolución entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 (con posiciones x_1 y x_2 en el espacio respectivamente) es tal que la integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

toma el menor valor posible. La función S se llama acción del sistema y la función L se llama Lagrangiano.

Los métodos analíticos descritos anteriormente son no excluyentes.

REFERENCIAS

O. Páez, Apuntes del Curso EI303 Análisis de Sistemas, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 1973.

J. Yutronic, Apuntes del Curso EI302 Análisis y Modelación de Sistemas Dinámicos, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 1976.

M. Duarte, Apuntes de Clases del Curso EL 32D Análisis y Modelación de Sistemas Dinámicos, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 1980-1990.

D.M. Himmelblau and K.B. Bischoff, Process analysis and simulation: Deterministic systems. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1968.

D.M. Himmelblau, Process analysis by statistical methods. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1970.

T.J. Williams, R.E. Goodson, L.B. Koppel and R.D. Gustafson, Modeling of industrial processes for computer control. Vol. 1, Purdue University, 1967.

R.G.E. Franks, Mathematical modeling in chemical engineering. John Wiley & Sons, 1967.