

# Ecuaciones de Movimiento

## Conceptos básicos

21 de marzo de 2012

### 1. Segunda Ley de Newton

- En un sistema de referencia inercial, la aplicación de una fuerza  $\vec{F}$  sobre un cuerpo, produce en éste un cambio de momentum de la forma

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.1a)$$

- En particular, si la masa es conservada y constante en el tiempo, el cambio de momentum se reduce a

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1.1b)$$

Se considerará, para efectos del curso, masas conservadas: es decir, la ecuación (1.1b)

### 2. Energía

- Una fuerza conservativa es la cual proviene de un *potencial*; es decir

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \quad (2.1)$$

- Se define la energía total de un sistema, como la suma de la energía cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2$  y la energía potencial  $U$  asociada. Esto se expresa como

$$E = T + U \quad (2.2)$$

Cabe destacar que esto es válido para el caso de presencia de fuerzas conservativas.

- Puede ser útil en algunos casos, utilizar el concepto de potencia  $P$  – de unidades  $\left[\frac{N \cdot m}{s}\right]$  – para obtener ecuaciones de movimiento, recordando que

$$P = \tau \cdot \omega \quad (2.3)$$

Donde  $\tau$  es torque  $[N \cdot m]$  y  $\omega$  es  $\left[\frac{rad}{s}\right]$ .

### 3. Sistema de Partículas y extensión a Sólido Rígido

- Considere  $N$  partículas de masa  $\{m_i\}$ , ubicadas en un instante a una posición  $\{\vec{x}_i\}$ . Se definen *Masa Total*  $M$  y *Vector Centro de Masa*  $\vec{X}_{cm}$  como

$$M = \sum_i m_i \quad (3.1a)$$

$$\vec{X}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i \quad (3.1b)$$

- Para el caso de un Sólido Rígido, que ocupa un espacio  $\Omega$  – volumen en 3D o superficie en 2D – las ecuaciones anteriores se escriben como

$$M = \int_{\Omega} dm \quad (3.2a)$$

$$\vec{X}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \vec{x} dm \quad (3.2b)$$

- Para un sistema de varias partículas o de sólido rígido, la ecuación de movimiento para el centro de masa está dada por:

$$M\ddot{\vec{X}}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \quad (3.3)$$

Donde  $\vec{F}_i^{(e)}$  denota la fuerza externa aplicada sobre la partícula  $i$ . Vale destacar que el aporte de fuerzas internas, es nulo para la ecuación de movimiento del centro de masa.

- A veces es conveniente trabajar en términos de un sistema de coordenadas interno, con el centro de masa como origen, como muestra la Figura 1.

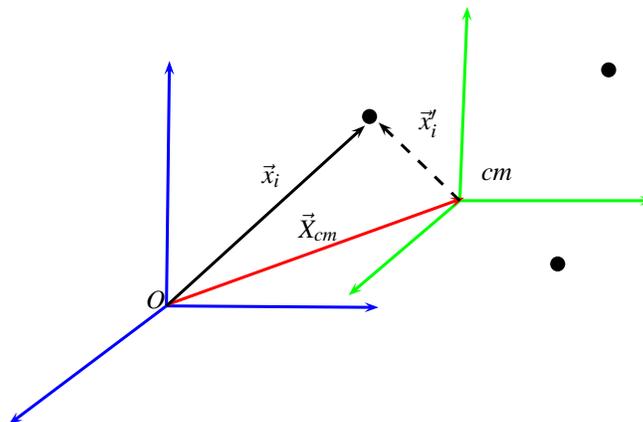


Figura 1: Coordenadas en base a centro de masa.

Se define posición y velocidad con respecto al centro de masa como

$$\vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{X}_{cm} \quad (3.4a)$$

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{cm} \quad (3.4b)$$

Con  $\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{X}}_{cm}$ .

- La energía cinética total está definida como la suma de las contribuciones individuales

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dm \quad (3.5)$$

Donde la última expresión es la extensión al caso del Sólido rígido.

Esta energía cinética puede ser separada en 2 términos físicos diferentes

$$T = T_{cm} + T' \quad (3.6)$$

Donde  $T_{cm} = \frac{1}{2}MV_{cm}^2$  denota la contribución de energía asociada al movimiento del centro de masa; mientras que  $T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$  denota la contribución de energía asociada al movimiento inercial. En particular, si el sistema es un cuerpo rígido,  $T' = \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2$ , donde  $I_{cm}$  es la inercia del cuerpo con respecto a su centro de masa y al sentido de giro del cuerpo – en unidades  $[kg \cdot m^2]$  – y  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular con la que rota el cuerpo – en unidades  $\left[\frac{rad}{s}\right]$ .

- Es conveniente recordar el Teorema de Steiner o de ejes paralelos, debido a que a veces, será conveniente utilizar la inercia de un cuerpo respecto a un punto en particular

$$I_p = I_{cm} + M \cdot (\vec{r}_{p \rightarrow cm})^2 \quad (3.7)$$

donde  $\vec{r}_{p \rightarrow cm}$  es la distancia desde el Centro de Masa hasta el punto  $p$

- En algunas situaciones, debemos estudiar sistemas *no inerciales*. Es aquí donde vale destacar la ecuación de movimiento para un sistema no inercial:

$$m\vec{a}^* = m\vec{a} - m\vec{A}_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}^*) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}^* - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{x}^* \quad (3.8a)$$

Donde  $\vec{x}^*$  hace referencia a la posición no inercial de la masa  $m$ ;  $\vec{v}^* = \dot{\vec{x}}^*$  la velocidad no inercial,  $\vec{a}^* = \ddot{\vec{x}}^*$  la aceleración no inercial,  $\vec{\Omega}$  vector velocidad angular, y  $\vec{A}_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*} = \ddot{\vec{R}}_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*}$  la aceleración con que se mueve el sistema de referencia no inercial  $\mathcal{O}^*$  con respecto al sistema de referencia inercial  $\mathcal{O}$ .

Vale destaca que, en caso que el sistema no inercial no posea velocidad angular  $\vec{\Omega}$ , la ecuación previa se reduce a

$$m\vec{a}^* = m\vec{a} - m\vec{A}_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*} \quad (3.8b)$$

## 4. Dinámica Lagrangeana

- Si existen  $N$  partículas, a priori, existen  $n = d \cdot N$  *grados de libertad*, donde  $d$  es la dimensión en que se produce el movimiento (a priori,  $d = 3$ ). Luego, si  $\vec{x}_1 = (r_1, r_2, r_3)$  existen  $n = 3N$  coordenadas  $\{r_i\}$ , donde

$$i = \underbrace{\{(1, 2, 3)\}}_{\text{Part.1}}, \underbrace{\{(4, 5, 6)\}}_{\text{Part.2}}, \dots, \underbrace{\{(n-2, n-1, n)\}}_{\text{Part.N}}$$

- Por otra parte, existen  $k$  *restricciones holonómicas* (que se pueden expresar analíticamente como una igualdad "sencilla") de la forma:

$$f_j(r_1, \dots, r_n, t) = c_j; \quad j = 1, \dots, k \quad (4.1)$$

Existen restricciones no holonómicas; sin embargo, no serán parte de nuestro estudio.

- Si existen  $n$  grados de libertad sujetos a moverse bajo  $k$  restricciones holonómicas; luego, existen  $(n - k)$  grados de libertad *independientes*. Con esto, basta elegir  $\{q_1, \dots, q_{n-k}\}$  coordenadas que describen el movimiento del sistema. Estas coordenadas se llaman *coordenadas generalizadas*

**EJEMPLO** Una partícula se mueve libremente sobre una mesa, sin levantarse de ésta; luego  $N = 1 \wedge n = 3$ . Además, está *restringida* a moverse, y se puede expresar como  $z = 0$ . Se observa que existe una sola restricción:  $k = 1$ . Luego, sólo se necesitan  $(n - k) = (3 - 1) = 2$  coordenadas para describir su movimiento: Puede ser  $\{x, y\}$ ,  $\{\rho, \theta\}$  u otra más conveniente.

- Se define el lagrangeano de la forma

$$L = T - U \quad (4.2)$$

Donde  $T, U$  están en función de  $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{n-k}, t\}$  de manera explícita.

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema, se pueden obtener en término de las coordenadas generalizadas de la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma^{NC} \quad (4.3)$$

donde  $Q_\sigma^{NC}$  es la fuerza generalizada externa (no conservativa), actuando sobre la coordenada  $q_\sigma$ . Para efectos del curso, no es necesario analizar fuerzas internas.

- Las *fuerzas generalizadas*  $Q_\sigma$ , que actúa sobre la coordenada generalizada  $\sigma$  se define como

$$Q_\sigma = \sum_{i=1}^{n-k} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma} \quad (4.4a)$$

En el caso que, las fuerzas  $F_i$  se descomponen en fuerzas que actúan *únicamente* sobre las coordenadas generalizadas, es decir para la coordenada  $q_\sigma$  actúa únicamente la fuerza  $F_\sigma$  (o torque  $\tau_\sigma$ ) la expresión se reduce a

$$Q_\sigma = F_\sigma \quad (4.4b)$$

Vale destacar que esto es una recopilación de conceptos físicos, con el objetivo de poder consultar si es que existe alguna duda de fondo. Sin embargo, no es todo lo relevante concerniente a las ecuaciones de movimiento.

Cualquier duda más profunda, se recomienda consultar un libro de mecánica, tales como Classical Mechanics de Goldstein, Poole & Safko o Theoretical Mechanics of Mass and Continua de Fetter & Walecka. Para efectos más prácticos, puede ser consultado Teoría de Vibraciones de Thompson o Vibrations: Theoretical Methods de Chen (Aparte de la bibliografía sugerida por la Prof. Viviana Meruane).