MA37A Optimización. Semestre Otoño 2008

Profesor: Héctor Ramírez C. Auxiliares: Omar Larre, Oscar Peredo.

Breve Resumen sobre Dualidad

9 de abril de 2008

1. Principales Resultados

El problema primal (P) tiene como problema dual (D):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P): } \min & c^\top x \\
 \text{s.a.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{(D): } \max & b^\top y \\
 \text{s.a.} & A^\top y \leq c \\
 & y \in \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Teorema (Dualidad Débil). Para x e y puntos factibles de (P) y (D), respectivamente, se tiene que $c^\top x \geq b^\top y$.

Corolario. Sean x e y puntos factibles para (P) y (D), respectivamente. Si $c^\top x = b^\top y$, entonces son óptimos respectivos.

Teorema (Dualidad Fuerte). Consideremos los problemas primal (P) y dual (D). En la siguiente tabla se resume los principales resultados de dualidad fuerte:

DUAL \ PRIMAL		(P) es factible		(P) es infactible
		(P) tiene solución	(P) no tiene solución (no acotado)	
(D) es factible	(D) tiene solución	OK val(P) = val(D) finito	Imposible	Imposible
	(D) no tiene solución (no acotado)	Imposible	Imposible	
(D) es infactible		Imposible	OK val(P) = val(D) = $-\infty$	Caso PATOLÓGICO: val(P) = $+\infty$ y val(D) = $-\infty$

Observación. Se probó que si $x^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (P) para cierta descomposición de $A = [B|N]$, entonces $y^* = B^{-\top} c_B$ es solución de (D).

Teorema (Holgura Complementaria). Consideremos los problemas primal (P) y dual (D). Se tiene que x^* e y^* son soluciones de (P) y (D), respectivamente, si y sólo si:

$$\begin{aligned}
 A^\top y^* &\leq c \\
 Ax^* &= b, \quad x^* \geq 0 \\
 (x^*)^\top (c - A^\top y^*) &= 0
 \end{aligned}$$

En este contexto al vector y^* suele llamarse multiplicador (de Karush-Kuhn-Tucker o de Lagrange) asociado a x^* .

2. Interpretación Económica de la Dualidad

Teorema. Consideremos los problemas primal (P) y dual (D). Sea x^* una solución no-degenerada de (P) e y^* el multiplicador asociado. Entonces, la componente j -ésima de y^* satisface:

$$\frac{\partial \text{val}(P)}{\partial b_j} = y_j^*.$$

Observación. El resultado anterior también es válido si x^* es degenerado, a condición que exista sólo un multiplicador asociado a x^* .

El teorema anterior nos dice que y_j^* representa el *costo incremental* o *costo marginal*¹ asociado al uso/producción/compra/etc. de una unidad extra de lo que represente restricción j en el problema de optimización (P). Este valor nos permite además una estimación acerca de cuanto cambia el valor del problema $\text{val}(P)$ cuando el lado derecho b_j cambia ligeramente.

Ejemplo. Una fábrica produce tres artículos en cantidades x_1, x_2, x_3 , los cuales utilizan dos materias primas en su elaboración, digamos a y b .

El proceso de producción debe satisfacer lo siguiente:

1) Para producir una unidad del artículo 1 se necesitan 2 unidades del recurso a y 5 del recurso b . Para producir una unidad del artículo 2 se necesitan 3 unidades del recurso a y 2 del recurso b . Para producir una unidad del artículo 3 se necesitan 1 unidades del recurso a y 1 del recurso b .

2) Hay 10 unidades disponibles del recurso a y 20 del recurso b . No hay posibilidad de guardar stock en bodega por lo que la fabrica debe ocupar completamente sus materias primas.

Finalmente, El costo unitario de venta del producto 1 es \$4, el del producto 2 es \$1 y el del producto 3 es \$5.

El fabricante ganó una licitación que le asegura la compra de toda su producción a un precio muy bueno, por lo que su problema será el de minimizar sus costos totales sujeto a sus restricciones en la producción.

Solución:

El problema del fabricante da lugar al siguiente problema lineal:

$$(P): \begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

de donde se obtiene el siguiente problema dual:

$$(D): \begin{array}{ll} \max & 10y_1 + 20y_2 \\ \text{s.a} & 2y_1 + 5y_2 \leq 4 \\ & 3y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & y_1 + y_2 \leq 5 \end{array}$$

Las soluciones del primal y dual son:

$$x^* = (40/11, 10/11, 0)^\top \quad y \quad y^* = (-3/11, 10/11)^\top,$$

y sus valores óptimos son $\text{val}(P) = \text{val}(D) = \$170/11$ (verificar usando dualidad débil).

Así, los costos marginales asociados a las materias primas a y b son $y_1^* = -3/11$ e $y_2^* = 10/11$, respectivamente. Luego, por ejemplo, si tenemos 2 insumos más de b podemos estimar el nuevo costo de producción en

$$\text{val}(\tilde{P}) = \text{val}(P) + 2 \cdot 10/11 = 190/11.$$

¹También llamado *precio sombra*