

OPTIMIZACION PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA ¹

Jorge Amaya A.
Departamento de Ingeniería Matemática y
Centro de Modelamiento Matemático
Universidad de Chile

10 de mayo de 2012

¹Texto para uso exclusivo de los estudiantes del curso **MA3701-Optimización**, de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile. Los comentarios son bienvenidos: jamaya@dim.uchile.cl

Índice general

1. Matemáticas para la Optimización	4
1.1. El problema de Optimización	4
1.2. Conjuntos convexos	5
1.2.1. Poliedros: caracterización y propiedades	11
1.2.2. Puntos extremos	13
1.2.3. Direcciones y direcciones extremas	20
1.2.4. Proyección sobre conjuntos convexos	24
1.2.5. Separación de convexos: teoremas de Farkas y Gordan	28
1.3. Funciones convexas	33
1.3.1. Conjuntos relevantes asociados a funciones convexas	37
1.3.2. Funciones convexas diferenciables	39
2. Caracterización de optimalidad	45
2.1. Definición del problema de Optimización	45
2.2. Condiciones de optimalidad	46
2.2.1. Optimización sin restricciones	46
2.2.2. Optimización con restricciones	48
3. Programación Lineal	56
3.1. Introducción y ejemplos	56
3.2. Resolución de problemas de Programación Lineal: algoritmo Simplex	58

3.2.1.	Fase II del algoritmo Simplex: mejorar solución en curso	60
3.2.2.	Fase I del algoritmo Simplex: obtener una solución inicial básica factible	67
3.3.	Programación Lineal Entera (ramificación y acotamiento)	71
4.	Dualidad en Programación Lineal y Aplicaciones	76
4.1.	Definición de dualidad y principales propiedades	78
4.2.	Interpretación económica de la dualidad	83
4.3.	Dual de cualquier problema lineal	85
4.4.	Algoritmo Simplex-dual	85
4.5.	Introducción al análisis post-optimal	86
4.5.1.	Variación en los coeficientes de la función objetivo	87
4.5.2.	Variación en el vector de recursos (o lado derecho)	89
4.5.3.	Introducción de una nueva actividad (o variable)	91
4.5.4.	Introducción de una nueva restricción	93
5.	Modelos para flujos en redes	97
5.1.	Motivación y descripción de problemas clásicos	97
5.1.1.	Problema de asignación	100
5.1.2.	Problema de transporte	101
5.1.3.	Problema de flujo máximo	103
5.1.4.	Problema de camino más corto	104
5.2.	Resolución del problema de transporte	106
5.2.1.	Obtener una solución básica factible inicial (Fase I)	106
5.2.2.	Examinar si una solución básica factible es óptima	110
5.2.3.	Modificar una solución básica factible (si no es óptima)	112
5.3.	Flujo de costo mínimo: mejoramiento de una solución en curso	113
6.	Algoritmos para Programación no Lineal	119
6.1.	Optimización sin restricciones	120

6.1.1.	Método del gradiente (descenso más pronunciado)	120
6.1.2.	Método de Newton	125
6.1.3.	Método de paso (minimización unidimensional)	128
6.2.	Optimización con restricciones	131
6.2.1.	Método del gradiente proyectado	131
6.2.2.	Método de direcciones admisibles	137
6.2.3.	Método de penalización	140

Capítulo 1

Matemáticas para la Optimización

1.1. El problema de Optimización

La formulación matemática de un problema de Optimización se escribe habitualmente en la forma:

$$(P) \text{ minimizar } \quad (\text{o maximizar}) \quad f(x) \\ x \in S$$

donde x es el **vector de variables de decisión**, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la **función objetivo** y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el **conjunto factible**. De aquí en adelante trabajaremos solamente con la formulación en términos problema de minimización, sabiendo que el otro caso es completamente análogo.

A menudo el conjunto factible está descrito mediante

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

y se dice que las expresiones $g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$ representan el **conjunto de restricciones** del problema (P) . El subconjunto X puede representar, por ejemplo, el primer cuadrante de $\mathbb{R}^n$, las variables enteras, o las variables binarias. Si $S = \mathbb{R}^n$, el problema se dirá **irrestricto**.

Un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que pertenezca al conjunto S se llamará **solución (o punto) factible** de (P) . Si además satisface que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in S,$$

se dirá que $\bar{x}$ es **solución óptima** o simplemente **solución de** (P) .

Dependiendo de las características particulares del problema, éste recibe nombres y tratamientos especiales para su resolución. Dos casos de interés, son el de la **programación lineal** (f y g_i son funciones lineales afines $\forall i$) y la **programación lineal entera** (en que además las variables sólo toman valores enteros). También trataremos la teoría y técnicas de solución de un problema con funciones no lineales.

Un concepto esencial para entender cómo plantear y resolver un problema de optimización es el de **convexidad**. Mostrar algo de la teoría básica del análisis convexo y su vinculación con la teoría de optimización son los objetivos de las siguientes secciones.

1.2. Conjuntos convexos

Definición 1.2.1 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. Se dice que S es **convexo**¹ si

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \quad \forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Geométricamente, esta definición se puede interpretar como sigue: *un conjunto no vacío es convexo si dados dos puntos del conjunto, el segmento de recta que los une está contenido en dicho conjunto* (ver Figura 1.1).

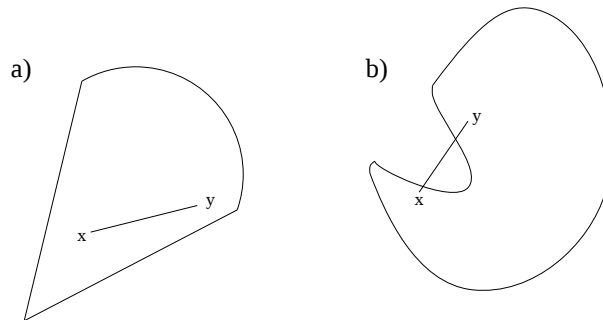


Figura 1.1: El conjunto de la figura a) es convexo. El conjunto de la figura b) no es convexo, pues existe un segmento de recta, uniendo dos puntos del conjunto, que no está incluido en el conjunto.

Ejemplo 1.2.1 Un espacio vectorial es un conjunto convexo (en particular, $\mathbb{R}^n$ lo es).

¹Por convención, el conjunto vacío será considerado convexo

Demostración. Directo pues, por definición, un espacio vectorial es cerrado para la suma y la ponderación por escalar. ■

Ejemplo 1.2.2 $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$ es un conjunto convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S$, $\lambda \in [0, 1]$. Por definición del conjunto S , esto significa que $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ e $y_1 + 2y_2 - y_3 = 2$.

Vemos que $\lambda x + (1 - \lambda)y = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \\ \lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3 \end{bmatrix}$ pertenece a S , pues

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + 2\{\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2\} - \{\lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3\} &= \\ \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + (1 - \lambda)(y_1 + 2y_2 - y_3) &= \\ 2\lambda + 2(1 - \lambda) &= 2 \end{aligned}$$

Definición 1.2.2 Sean $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fijos. Se llama **hiperplano** al conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \alpha\}$$

Un hiperplano H define dos **semiespacios**:

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq \alpha\}$$

Por ejemplo, en el caso $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$ se tiene que $a^T = (1, 2, -1)$ y $\alpha = 2$. Los dos semiespacios asociados son:

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2\}.$$

Ejemplo 1.2.3 Un semiespacio S en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

Demostración. Consideremos $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, que definen el semiespacio

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}.$$

Sean $x, y \in S$, $\lambda \in [0, 1]$, entonces

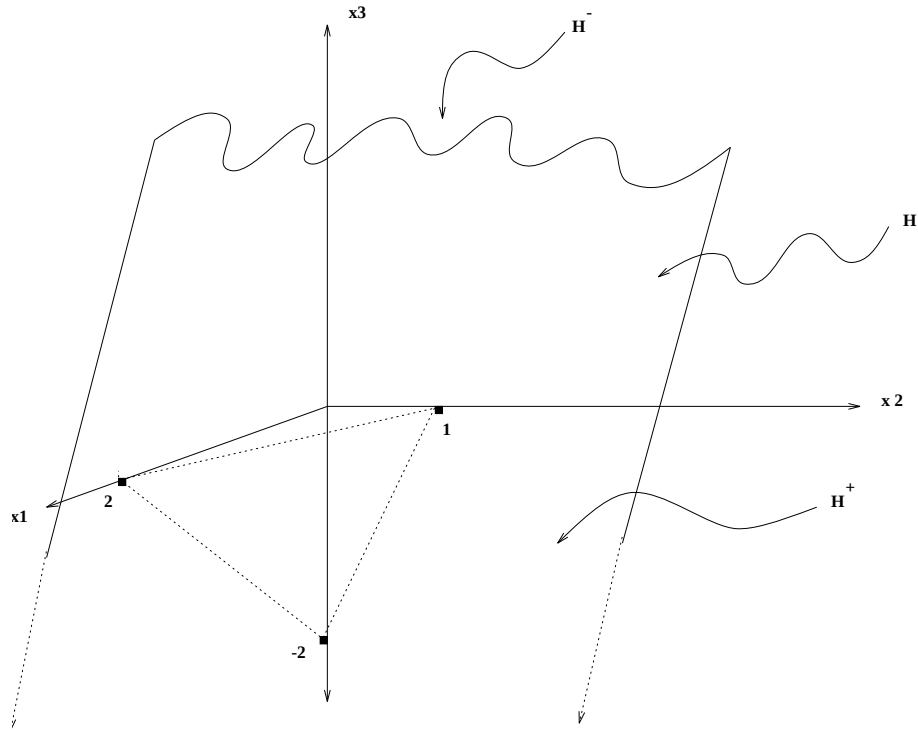


Figura 1.2: Semiespacios generados por el hiperplano H

$$a^T \{\lambda x + (1 - \lambda)y\} = \lambda a^T x + (1 - \lambda)a^T y \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$$

Luego $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ y, por lo tanto, S es convexo. ■

Proposición 1.2.1 Sean S_1 y S_2 dos conjuntos convexos. Entonces $S_1 \cap S_2$ es un conjunto convexo.

Demostración. Sean $x, y \in S_1 \cap S_2$, $\lambda \in [0, 1]$. Entonces

$$x, y \in S_1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1$$

y

$$x, y \in S_2 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S_2,$$

puesto que S_1 y S_2 son convexos.

Luego $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1 \cap S_2$, es decir, $S_1 \cap S_2$ es convexo. ■

Observación 1.2.1 *Observemos que:*

- i) *Esta propiedad se puede generalizar fácilmente a una intersección cualquiera de convexos. Esto es, si Γ es un conjunto arbitrario, incluso no numerable, y $\{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una clase de conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$ es un conjunto convexo.*
- ii) *Aunque del Ejemplo 1.2.3 puede concluirse fácilmente que un hiperplano es un conjunto convexo (reemplazando las desigualdades por igualdades), podemos usar esta proposición para probar que un hiperplano es un conjunto convexo, dado que es intersección de convexos.*

Ejemplo 1.2.4 *Sistema de desigualdades lineales:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

con $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

El sistema se anota $Ax \leq b$, con $A = (a_{ij})_{i=1\dots m; j=1\dots n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ es la intersección de m semiespacios de la forma

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n / A_i x \leq b_i\}$$

(donde A_i denota la fila i -ésima de la matriz A), los cuales, según vimos en el Ejemplo 1.2.3, son conjuntos convexos. Luego, por la Proposición 1.2.1, S es convexo.

Definición 1.2.3 Sean $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. El vector $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ se dice **combinación convexa** de los k vectores $x_1, \dots, x_k$.

Definición 1.2.4 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (no necesariamente convexo). Se define la **envoltura convexa** de S , de la manera siguiente:

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Es decir, es el conjunto de todas las posibles combinaciones convexas de puntos de S .

Observación 1.2.2 Sean $S, S' \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces:

- $S \subseteq co(S)$.
- S es convexo si y sólo si $co(S) = S$.
- Si $S \subseteq S'$ entonces $co(S) \subseteq co(S')$.

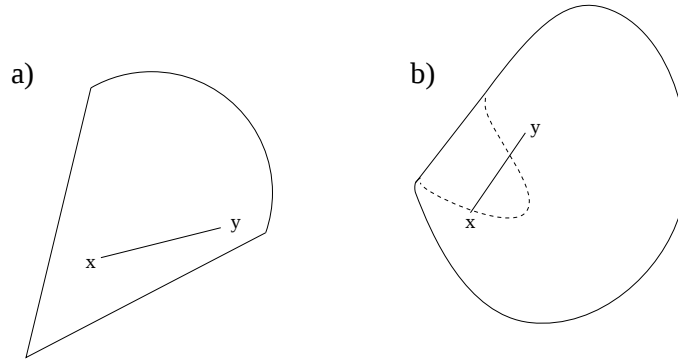


Figura 1.3: La envoltura convexa del conjunto de la figura a) coincide con él, por ser convexo. Para el conjunto de la figura b), la línea sólida delimita su envoltura convexa.

Ejemplo 1.2.5 La envoltura convexa de los números racionales es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.6 Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Su envoltura convexa queda determinada por el poliedro de la Figura 1.4, cuyos vértices están dados por el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Proposición 1.2.2 $co(S)$ es un conjunto convexo.

Demostración. Sean $x, y \in co(S)$, es decir,

$$x = \sum_{i=1}^k \nu_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$$

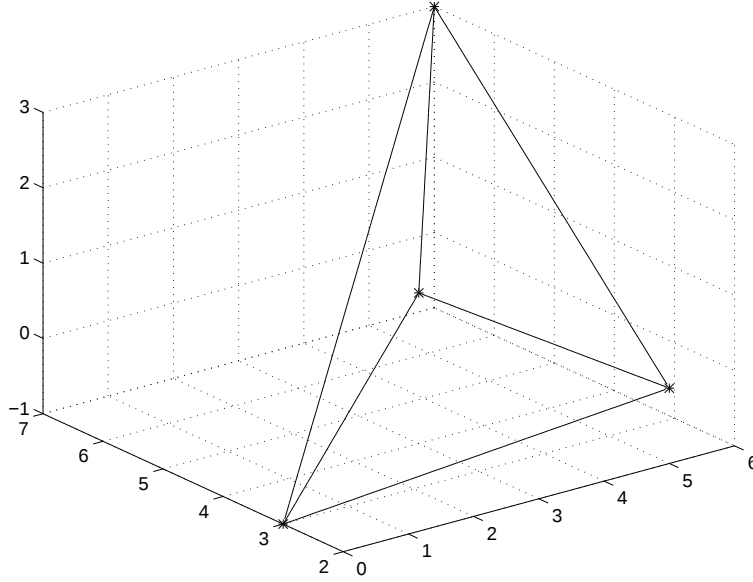


Figura 1.4: La envoltura convexa del conjunto de puntos señalados queda determinada por un poliedro cuyos vértices están dados por un subconjunto del conjunto de puntos.

donde $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$ y $\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m$, son ponderadores de las combinaciones convexas.

Sea $\lambda \in [0, 1]$ y $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^k \nu_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$.

Llamando $z_i = x_i$, $\alpha_i = \lambda \nu_i$, $\forall i = 1, \dots, k$ y $z_{k+i} = y_i$, $\alpha_{k+i} = (1 - \lambda) \mu_i$ $\forall i = 1, \dots, m$, se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i z_i$ con

$$z_i \in S, \alpha_i \in [0, 1], \quad \forall i = 1, \dots, k + m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i = 1.$$

Luego por definición se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{co}(S)$, por lo tanto $\text{co}(S)$ es convexo. ■

Proposición 1.2.3 *El conjunto $\text{co}(S)$ es el convexo más pequeño (en el sentido de la inclusión) que contiene a S , es decir, $\text{co}(S) = \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$.*

Demostración. Sea $x \in \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$. Entonces $x \in C, \forall C$ convexo, tal que $S \subseteq C$. Luego $x \in \text{co}(S)$, que es un convexo particular que contiene a S .

Sean ahora $x \in co(S)$ y C un convexo cualquiera que contiene a S . Entonces $co(S) \subseteq co(C) = C$, por lo tanto $x \in C$. Luego, $x \in \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$. ■

Ejercicio 1.2.1 Sean S_1 y S_2 convexos, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la suma y ponderación de conjuntos como sigue:

- $S_1 + S_2 = \{x + y / x \in S_1, y \in S_2\}$
- $\alpha S_1 = \{\alpha x / x \in S_1\}$

Pruebe que $S_1 + S_2$ y αS_1 son convexos.

1.2.1. Poliedros: caracterización y propiedades

Definición 1.2.5 Se llama **poliedro** a un conjunto de la forma $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$, es decir, un poliedro es una intersección finita de semiespacios.

Proposición 1.2.4 $\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ es un poliedro.²

Demostración. Claramente, el conjunto $\mathcal{P}'$ queda representado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde I la matriz identidad en dimensión n .

Llamando $A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$, $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$, se obtiene un sistema de la forma

$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / A'x \leq b'\}$, que es igual a $\mathcal{P}'$. Luego, $\mathcal{P}'$ es un poliedro. ■

² $x \geq 0$ si y solamente si $x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$

Observación 1.2.3 Es obvio que $\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq b\}$ es un poliedro. En efecto: como $x \in \mathbb{R}^n$ es irrestricto, basta multiplicar el sistema de desigualdades por -1 , y definir $A' = -A$, $b' = -b$.

Proposición 1.2.5 Todo poliedro es un conjunto convexo.

Demostración. Ver Ejemplo 1.2.4. ■

Se dirá que un poliedro $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ está escrito en forma canónica. En lo sucesivo trabajaremos con esta representación.

Proposición 1.2.6 Un poliedro es un conjunto cerrado.

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ el poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ y consideremos $\bar{x} \in \bar{\mathcal{P}}$ (adherencia o cerradura de $\mathcal{P}$). Mostraremos que $\bar{x} \in \mathcal{P}$.

Como $\bar{x} \in \bar{\mathcal{P}}$, existe una sucesión $\{x_k\}$ en $\mathcal{P}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$.

Además, $\forall k \geq 0$, el punto x_k verifica

$$\begin{aligned} Ax_k &= b \\ x_k &\geq 0 \end{aligned}$$

Tomando límite (y por continuidad de la función lineal $x \mapsto Ax$) se tiene:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego $\bar{x} \in \mathcal{P}$ y por lo tanto $\bar{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$. Dado que se cumple siempre que $\mathcal{P} \subseteq \bar{\mathcal{P}}$, se obtiene $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, luego $\mathcal{P}$ es cerrado. ■

Ejemplo 1.2.7 $C = \{x \in \mathbb{R}^2 / -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \geq 4, x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Matricialmente esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto C es un poliedro, convexo y cerrado, pero no acotado, tal como se aprecia en la Figura 1.5.

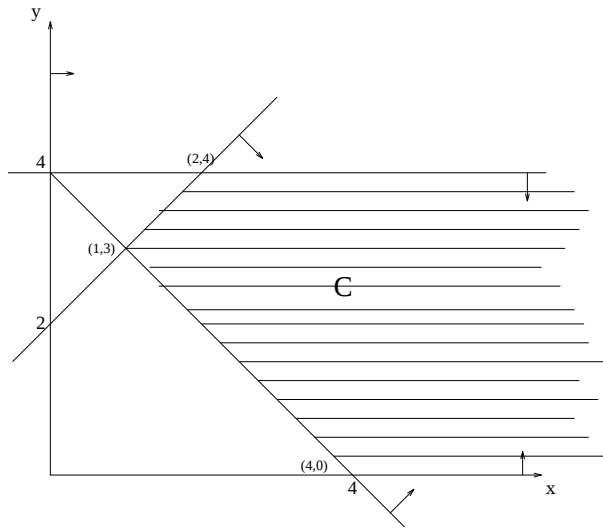


Figura 1.5: El conjunto C es un poliedro, convexo y cerrado, pero no acotado.

1.2.2. Puntos extremos

Definición 1.2.6 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $S \neq \emptyset$. Un vector $x \in S$ se llama **punto extremo de S** si no puede ser representado como combinación convexa de otros dos puntos distintos del convexo. Es decir, si $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, con $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in]0, 1[$, entonces $x = x_1 = x_2$.

Ejemplo 1.2.8 Veamos algunos casos de conjuntos convexos y sus puntos extremos.

- a) Sea $S = B(0, 1)$, la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos extremos queda representado por $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$, que es la frontera de S .
- b) El conjunto de puntos extremos del poliedro del Ejemplo 1.2.6 es

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- c) El conjunto de puntos extremos de un semiespacio cerrado es vacío.
- d) Sean $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y $S = co\{U\}$

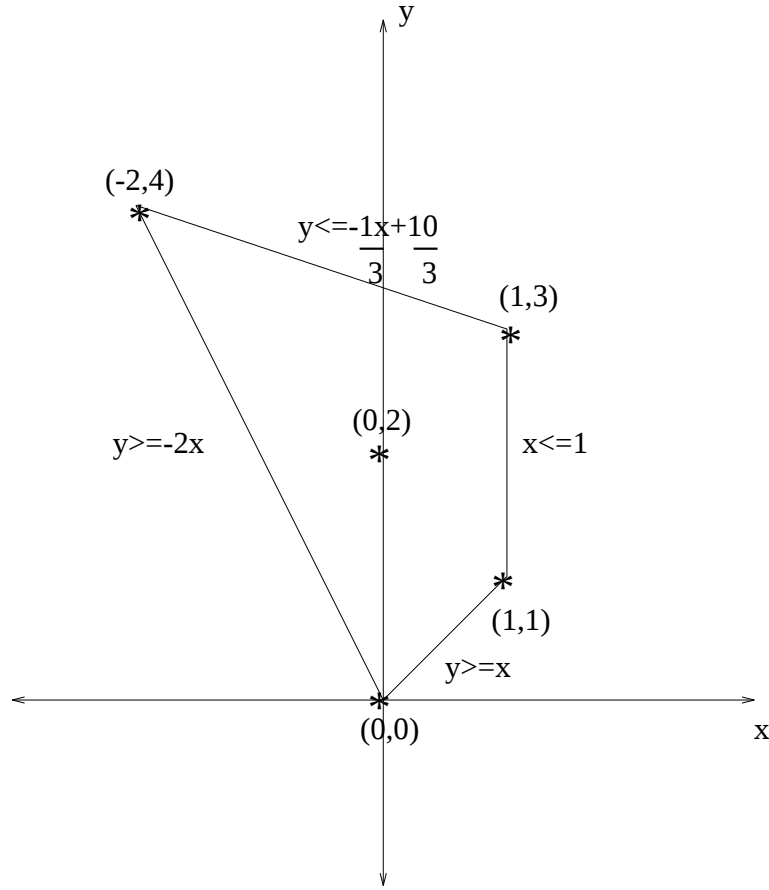


Figura 1.6: S es la envoltura convexa del conjunto U

Naturalmente, el conjunto de puntos extremos de S es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

El sistema que representa a S es

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

En general, fácilmente se puede ver que x es punto extremo de un convexo S si y solamente si $S \setminus \{x\}$ es un conjunto convexo, de donde se sigue que si S^* es tal que $co(S^*) = S$, entonces necesariamente S^* debe incluir al conjunto de puntos extremos de S .

La noción de punto extremo es de suma importancia en la teoría de optimización pues, como veremos más adelante, está en relación directa con el conjunto de soluciones para un problema de Programación Lineal, por lo cual es importante tener una caracterización simple. Veamos el siguiente ejemplo de motivación:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 \leq 2, \quad 8x_1 + 3x_2 \leq 8, \quad x_1, x_2 \geq 0\}$$

El gráfico se muestra en la Figura 1.7.

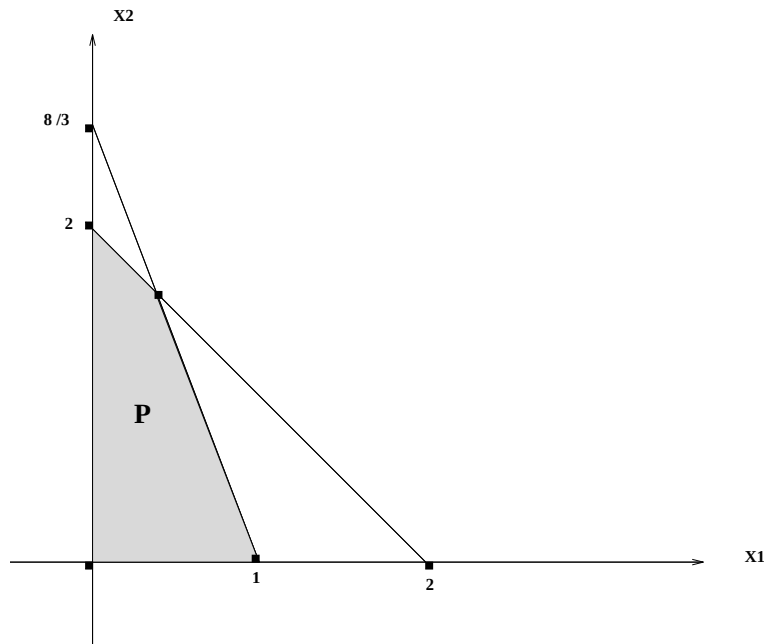


Figura 1.7: Ejemplo de motivación.

Los puntos extremos son $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Trabajaremos con el poliedro (en $\mathbb{R}^4$)

$$\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad 8x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$$

que es equivalente a $\mathcal{P}$ en el sentido siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \exists x_3, x_4 \geq 0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}'.$$

Examinemos entonces el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\8x_1 + 3x_2 + x_4 &= 8 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Asignando valor nulo a dos variables cualesquiera podemos entonces resolver el sistema de dos ecuaciones cada vez. Esto da las soluciones

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se observa que dos de ellas (la tercera y la cuarta) no satisfacen la condición de positividad, luego no pertenecen a $\mathcal{P}'$. Sin embargo las cuatro soluciones restantes determinan en sus dos primeras coordenadas, los puntos extremos de $\mathcal{P}$, a saber:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esto se expresa en forma general en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1 *Sea un poliedro $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Un punto x es extremo de $\mathcal{P}$ si y sólo si la matriz A se puede descomponer, eventualmente reordenando sus columnas, en la forma $A = [B, N]$, donde $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ es invertible, $N \in \mathcal{M}_{m \times (n-m)}(\mathbb{R})$ corresponde a las columnas restantes y $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$, con $B^{-1}b \geq 0$.*

Demostración.

($\Leftarrow$) Sea $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$. Se tiene que $x \in \mathcal{P}$, pues

$$Ax = [B, N] \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = BB^{-1}b + N0 = b.$$

Sean $u, v \in \mathcal{P}$ tales que $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$, para algún $\lambda \in]0, 1[$, es decir

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

De allí:

$$\begin{aligned}(1) \quad & \lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1 = B^{-1}b \\(2) \quad & \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2 = 0\end{aligned}$$

Como $u, v \in \mathcal{P}$, necesariamente $u \geq 0, v \geq 0$. Luego de (2) se tiene que $u_2 = v_2 = 0$.

Como $u \in \mathcal{P}$ satisface $Au = b$, esto es $[B, N] \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Bu_1 = b$ entonces $u_1 = B^{-1}b$, por lo tanto, $u = x$.

De la misma manera se prueba que $v = x$, con lo que se concluye que x es punto extremo.

($\implies$) Supongamos ahora que $x \in \mathcal{P}$ es un punto extremo. Eventualmente reordenando las columnas del sistema, x puede escribirse

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $x_i > 0$ para $i = 1, \dots, k$, $k \leq m$.

Notemos por A_k la k -ésima columna de A . Luego $A = [A_1, \dots, A_n]$ y

$$Ax = b \iff \sum_{i=1}^k x_i A_i = b$$

Probaremos que $A_1, \dots, A_k$ son linealmente independientes. Supongamos que son linealmente dependientes, es decir, que existen $\mu_1, \dots, \mu_k$ no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^k \mu_i A_i = 0$.

Definamos el vector

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, para $\alpha > 0$, construyamos los siguientes vectores

$$\begin{aligned} y &= x + \alpha\mu \\ z &= x - \alpha\mu \end{aligned}$$

Es claro que $y, z \in \mathcal{P}$, para α suficientemente pequeño. Además $x \neq y$, $y \neq z$ y $z \neq x$, por lo tanto $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ es combinación convexa de dos puntos distintos en $\mathcal{P}$, luego no es extremo (contradicción).

Así, $A_1, \dots, A_k$ son linealmente independientes, lo que implica, en particular, que $k \leq m$. Podemos agregar $A_{k+1}, \dots, A_m$ (eventualmente reordenando columnas) para obtener un conjunto maximal (recordar que A es de rango m) y definir $B = [A_1, \dots, A_m]$, que es una matriz invertible, y $N = [A_{m+1}, \dots, A_n]$.

Con esto, A se puede escribir en la forma $A = [B, N]$, a menos de una reordenación de las columnas. Se tiene entonces las equivalencias

$$Ax = b \iff \sum_{i=1}^n x_i A_i = b \iff \sum_{i=1}^m x_i A_i + \sum_{i=m+1}^n x_i A_i = b$$

Notando $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, con

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

la ecuación anterior se escribe:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

de donde $x_B = B^{-1}b$. ■

Corolario 1.2.1 *El número de puntos extremos de un poliedro en la forma canónica es finito.*

Demostración. Hay a lo sumo $\binom{n}{m}$ formas de elegir las m columnas independientes de A , y cada matriz B está asociada a lo más a un punto extremo. ■

Ejemplo 1.2.9 Consideremos un poliedro en la forma canónica dado por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos sus puntos extremos. De acuerdo al corolario anterior, existen a lo sumo 6 puntos extremos dado que hay 6 formas posibles de elegir la matriz B .

(1) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es invertible.

(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ es invertible, pero $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ no es un vector positivo.

(3) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es invertible y el vector $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ tiene todas sus coordenadas positivas.

(4) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ es invertible, pero $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ no es un vector positivo.

(5) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es invertible y el vector $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ tiene todas sus coordenadas positivas.

(6) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ es invertible, pero $B^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ no es un vector positivo.

Los casos (3) y (5) nos entregan puntos extremos para el poliedro en estudio, sólo falta ubicar los valores resultantes en las posiciones correctas:

- La matriz del caso (3) toma las columnas primera y cuarta de la matriz A , luego el vector punto extremo correspondiente será $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- La matriz del caso (5) toma las columnas segunda y cuarta de la matriz A , luego el vector punto extremo correspondiente será $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Definición 1.2.7 Se llama **polígono** a la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos.

De acuerdo con esta definición, puede concluirse fácilmente que todo polígono es envoltura convexa de sus puntos extremos. Es obvio, además, que todo polígono es un poliedro. Luego, parece natural preguntarse si todo poliedro puede escribirse como combinación convexa de sus puntos extremos. La respuesta es negativa, cuando el poliedro es no acotado. En el Ejemplo 1.2.7 observamos que los puntos del poliedro que no están en la superficie del triángulo definido por los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, no pueden ser expresados como combinación convexa de esos tres puntos extremos.

Ejemplo 1.2.10 Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq |x_1|\}$. Dado que

$$x_2 \geq |x_1| \iff x_2 \geq x_1 \geq -x_2, \quad x_2 \geq 0,$$

se tiene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0\}$$

o, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

Como es posible ver en la Figura 1.8, el origen es el único punto extremo y ningún punto del poliedro S puede expresarse como combinación convexa de sus puntos extremos. Luego, para poliedros no acotados introduciremos un nuevo concepto, en la subsección siguiente.

1.2.3. Direcciones y direcciones extremas

Definición 1.2.8 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un conjunto convexo. Un vector $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, se dice **dirección** de S si $\forall x \in S$ se tiene que $x + \lambda d \in S$, $\forall \lambda \geq 0$.

Consideremos el poliedro $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$. Una dirección de $\mathcal{P}$ debe satisfacer que $\forall x \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} A(x + \lambda d) &= b \quad \forall \lambda \geq 0 \\ x + \lambda d &\geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

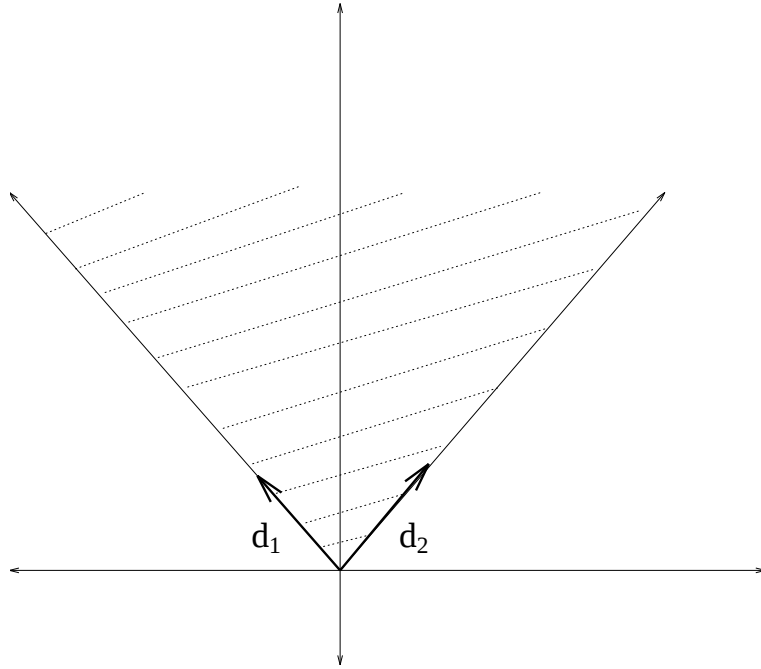


Figura 1.8: El origen es el único punto extremo del poliedro de la figura y d_1 , d_2 son sus únicas direcciones extremas.

Luego, d es dirección de $\mathcal{P}$ si y solamente si satisface el sistema $Ad = 0$, $d \geq 0$.

Definición 1.2.9 Dos direcciones d_1 y d_2 se dirán **iguales** si $d_1 = \alpha d_2$ para algún $\alpha > 0$. Se escribirá $d_1 = d_2$, si no hay posible confusión.

Definición 1.2.10 Sea S un convexo cerrado y $d \in \mathbb{R}^n$ una dirección de S . Se dice que d es **dirección extrema** si, dadas d_1 y d_2 , direcciones de S , tales que $d = \alpha d_1 + \beta d_2$ para algún $\alpha, \beta > 0$, entonces se tiene que $d = d_1 = d_2$.

Es decir, d no puede expresarse como combinación lineal positiva (estricta) de dos direcciones distintas.

Ejemplo 1.2.11 En la Figura 1.8, d_1 y d_2 son direcciones extremas y toda otra dirección se escribe como combinación lineal positiva de ellas.

Con lo que hemos hecho hasta aquí, una pregunta interesante es: ¿existirá alguna caracterización de las direcciones extremas, equivalente a la obtenida para puntos extremos?

Escribamos la matriz A que representa el poliedro escrito en la forma canónica tal como en el caso de puntos extremos, es decir, $A = [B, N]$ y consideremos $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$ con $B^{-1}a_j \leq 0$, donde a_j es columna de N . El vector e_j tiene coordenadas nulas, salvo un 1 en la posición que indica el índice j .

Verifiquemos que d es dirección: en efecto, $d \geq 0$ y

$$Ad = [B, N] \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = -BB^{-1}a_j + Ne_j = -a_j + a_j = 0.$$

Supongamos que no es extrema. Entonces existen d_1 y d_2 , direcciones de $\mathcal{P}$ distintas entre sí, tales que d es combinación lineal positiva de ellas, es decir,

$$d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \text{ para algunos } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Entonces d_1 y d_2 tendrán necesariamente la forma:

$$d_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ \eta_1 e_j \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} d_{21} \\ \eta_2 e_j \end{pmatrix}$$

para algunos $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ tales que $\eta_1 + \eta_2 = 1$.

Como d_1 y d_2 son direcciones de $\mathcal{P}$ entonces $Ad_1 = Ad_2 = 0$. Luego

$$\begin{aligned} [B, N] \begin{pmatrix} d_{11} \\ \eta_1 e_j \end{pmatrix} &= Bd_{11} + \eta_1 Ne_j = Bd_{11} + \eta_1 a_j = 0 \Rightarrow d_{11} = -\eta_1 B^{-1}a_j \\ [B, N] \begin{pmatrix} d_{21} \\ \eta_2 e_j \end{pmatrix} &= Bd_{21} + \eta_2 Ne_j = Bd_{21} + \eta_2 a_j = 0 \Rightarrow d_{21} = -\eta_2 B^{-1}a_j \end{aligned}$$

por lo tanto $d_1 = d_2 = d$ (en el sentido de la igualdad de direcciones), lo que muestra que d es dirección extrema. De paso, se observa que $\eta_1, \eta_2 \neq 0$ puesto que d_1 y d_2 son direcciones.

Lo explicado anteriormente nos permite formular el teorema de caracterización de direcciones extremas.

Teorema 1.2.2 *Sea un poliedro $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Una dirección $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$ es dirección extrema de $\mathcal{P}$ si y sólo si la matriz*

A se puede descomponer, eventualmente reordenando sus columnas, en la forma $A = [B, N]$, donde $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ es invertible y $\bar{d}$ es un múltiplo positivo de $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$ con $B^{-1}a_j \leq 0$, donde $a_j \in N$ (es un vector columna de N) y e_j es el j -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{n-m}$.

Corolario 1.2.2 *El número de direcciones extremas de un poliedro en la forma canónica es finito.*

Demostración. Hay a lo más $\binom{n}{m}$ formas de elegir B^{-1} y como hay $n - m$ columnas en N , entonces $(n - m) \binom{n}{m}$ es el número máximo de direcciones extremas. ■

Ejemplo 1.2.12 *Volvamos al Ejemplo 1.2.9. De acuerdo al corolario anterior, existen 12 posibles direcciones extremas, por lo tanto no desarrollaremos el cálculo completo. Sólo consideraremos el siguiente caso: tomemos la matriz B formada por la segunda y cuarta columnas de A , es decir $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.*

Luego $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. El producto de B^{-1} con la primera columna de N no es negativo, por lo tanto, no nos permite calcular una dirección extrema. Sin embargo, el producto con la segunda columna de N es negativo. Tal como en el caso de puntos extremos, sólo basta ordenar la información para decir que $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es dirección extrema del poliedro.

Para concluir esta sección, enunciaremos, sin demostrar, un teorema de caracterización que liga todo lo que hemos desarrollado en esta sección.

Teorema 1.2.3 *Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Sean $x_1, \dots, x_k$ los puntos extremos y $d_1, \dots, d_l$ las direcciones extremas de $\mathcal{P}$. Entonces, $x \in \mathcal{P}$ si y sólo si puede ser escrito como la suma de una combinación conca de los puntos extremos y una combinación lineal positiva de las direcciones extremas, es decir,*

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

donde $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \mu_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, l.$

Teorema 1.2.4 $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ tiene al menos una dirección si y sólo si $\mathcal{P}$ es no acotado.

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $\mathcal{P}$ tiene una dirección d , entonces es no acotado puesto que dado $x \in \mathcal{P}$ se tiene que $x + \lambda d \in \mathcal{P}, \forall \lambda \geq 0$ y por lo tanto $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|x + \lambda d\| = \infty$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{P}$ es no acotado y que no posee direcciones. Entonces tampoco posee direcciones extremas y, por el teorema anterior, todo punto $x \in \mathcal{P}$ puede escribirse de la forma $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, para algunos $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Por la desigualdad triangular

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^k \|x_i\| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{P}$$

lo que contradice que $\mathcal{P}$ sea no acotado. ■

Ejercicio 1.2.2 Sea S un convexo. Demuestre que $x \in S$ es punto extremo si y sólo si $S \setminus \{x\}$ es convexo.

Ejercicio 1.2.3 Probar que si S es un conjunto finito, $co(S)$ es un poliedro.

1.2.4. Proyección sobre conjuntos convexos

Teorema 1.2.5 Sea S un conjunto convexo, cerrado, no vacío en $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y \notin S$. Entonces, existe un único $\bar{x} \in S$ que minimiza la función

$$\begin{aligned} \varphi_y : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_y(x) = \|y - x\| \end{aligned}$$

Demostración.

Existencia: Sea $\gamma = \inf\{\varphi_y(x) \mid x \in S\}$. Existe una sucesión minimizante $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq S$ tal que

$$\varphi_y(x_k) \rightarrow \gamma, \quad k \rightarrow \infty.$$

Usando la propiedad conocida como Ley del Paralelógramo,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

para $u = x_k - y$, $v = x_l - y$, tenemos

$$\begin{aligned} \|x_k - x_l\|^2 &= 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - \|x_k + x_l - 2y\|^2 \\ &= 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l - y\right\|^2 \end{aligned}$$

Notar que, por convexidad de S , se tiene que $\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l \in S$, luego $\left\|\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l - y\right\|^2 \geq \gamma^2$, por lo tanto,

$$\|x_k - x_l\|^2 \leq 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - 4\gamma^2$$

Si $k, l \rightarrow \infty$, se tiene que $\|x_k - y\| \rightarrow \gamma$ y $\|x_l - y\| \rightarrow \gamma$, luego $\|x_k - x_l\|^2 \rightarrow 0$, es decir, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, converge a un cierto $\bar{x} \in S$, pues S es cerrado. Por continuidad de la norma, $\varphi_y(\bar{x}) = \gamma$.

Unicidad: Sea $\bar{\bar{x}} \in S$, $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$, tal que $\varphi_y(\bar{\bar{x}}) = \gamma$. De manera análoga a la parte anterior, se llega a $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|^2 \leq 2\|\bar{x} - y\|^2 + 2\|\bar{\bar{x}} - y\|^2 - 4\gamma^2$, que es igual a cero, luego $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$. ■

Observación 1.2.4 *El teorema anterior es válido para la norma euclídeana, pero si se usa otra norma, entonces es posible que la proyección no quede bien definida al no haber unicidad. En lo que sigue, salvo indicación expresa en contrario, siempre entenderemos que se usa la norma euclídeana.*

Definición 1.2.11 *Sea S un convexo cerrado no vacío.*

i) Para $y \in \mathbb{R}^n$, se define la **distancia de y a S** , por $d(y, S) = \min\{\varphi_y(x) \mid x \in S\}$.

ii) Para $y \in \mathbb{R}^n$, se define la **proyección de y sobre S** , mediante

$$P_S(y) = \arg \min\{\varphi_y(x) \mid x \in S\} = \bar{x} \in S,$$

siendo $\bar{x}$ el único que satisface $\varphi_y(\bar{x}) \leq \varphi_y(x), \forall x \in S$.

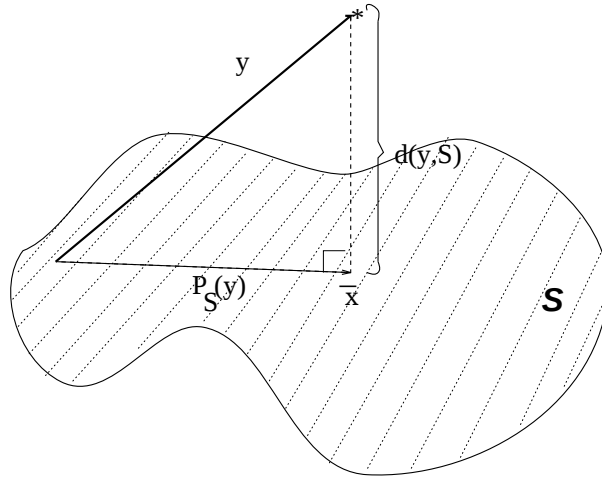


Figura 1.9: Distancia y proyección del punto y al conjunto S

Observación 1.2.5 La notación $\arg \min$ se lee como "el argumento que minimiza". Claramente, si $y \in S$ se tiene que $d(y, S) = 0$ y $P_S(y) = y$.

Por otra parte, de aquí en adelante usaremos la notación $\langle u, v \rangle$ para el producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$ pero, como interpretamos los vectores de $\mathbb{R}^n$ como columnas, es equivalente escribir $u^T v$.

Teorema 1.2.6 Sean S un convexo cerrado no vacío e $y \notin S$. Se tiene que

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S$$

si y solamente si $\bar{x}$ minimiza $\varphi_y(x)$.

Demostración. Supongamos que para cierto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|y - \bar{x} - (x - \bar{x})\|^2 \\ &= \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \\ &\geq \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 \\ &\geq \|y - \bar{x}\|^2 \end{aligned}$$

Esto implica que $\|y - \bar{x}\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x \in S$. Es decir $\varphi_y(\bar{x}) \leq \varphi_y(x), \quad \forall x \in S$.

Inversamente, si $\bar{x}$ minimiza φ_y en S , entonces $\forall x \in S$:

$$\begin{aligned}\|y - x\|^2 &= \|y - \bar{x} - (x - \bar{x})\|^2 \\ &= \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \\ &\leq \|y - x\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle\end{aligned}$$

Luego $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|^2$, $\forall x \in S$.

Como S es un conjunto convexo y $\bar{x} \in S$, entonces $\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} \in S, \forall \lambda \in]0, 1[$ y por lo tanto:

$$\langle y - \bar{x}, \lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} - \bar{x}\|^2$$

de donde

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{\lambda}{2}\|x - \bar{x}\|^2$$

Tomando $\lambda \rightarrow 0^+$, se tiene el resultado. ■

Geométricamente, el teorema anterior quiere decir que la proyección de y sobre S se alcanza en un punto $\bar{x}$ tal que el trazo $y - \bar{x}$ es ortogonal al conjunto.

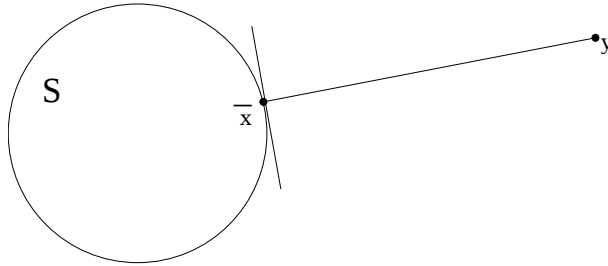


Figura 1.10: Proyección de y sobre S .

Teorema 1.2.7 Sea S un convexo cerrado no vacío, entonces $\|P_S(x) - P_S(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.2.6 Esto es equivalente a decir que si S un convexo cerrado no vacío, la función de proyección P_S es de Lipschitz (continua).

Ejercicio 1.2.4 Demuestre el Teorema 1.2.7.

1.2.5. Separación de convexos: teoremas de Farkas y Gordan

Teorema 1.2.8 (Hahn-Banach) Sea S un convexo cerrado no vacío, y $y \notin S$. Entonces existen $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$\begin{aligned} p^T y &> \alpha \\ p^T x &\leq \alpha, \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

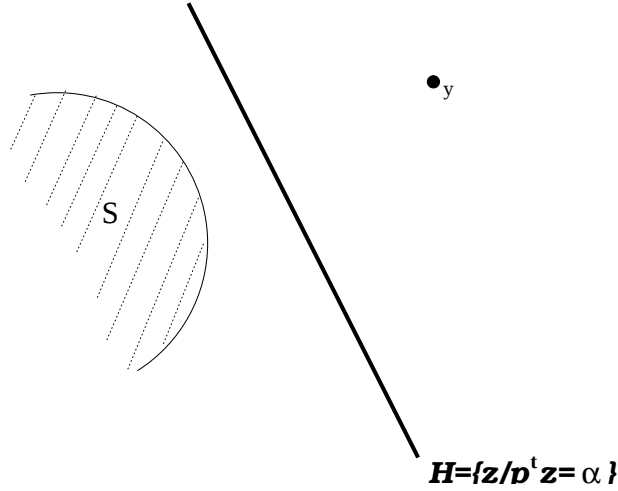


Figura 1.11: H es el hiperplano separador entre S e y .

Demostración. De acuerdo a lo desarrollado en la subsección anterior, existe un único $\bar{x} \in S$ tal que $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S$.

Sean $p = y - \bar{x} \neq 0$ y $\alpha = \langle p, \bar{x} \rangle$. Tenemos que

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S$$

por lo tanto

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, \bar{x} \rangle = \alpha \quad \forall x \in S \quad (1.1)$$

Por otro lado

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y + y - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y \rangle + \langle p, y - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y \rangle + \|p\|^2 \leq 0, \quad \forall x \in S$$

lo que implica que

$$\langle p, x \rangle + \|p\|^2 \leq \langle p, y \rangle, \forall x \in S.$$

Como $\|p\|^2 \neq 0$, se tiene que

$$\langle p, x \rangle < \langle p, y \rangle, \forall x \in S \quad (1.2)$$

Por (1.1), se tiene que $\langle p, x \rangle \leq \alpha \quad \forall x \in S$ y por (1.2), se tiene que $\alpha < \langle p, y \rangle$, lo que concluye la demostración. ■

El teorema anterior introduce la noción de **hiperplano separador** (ver Figura 1.11).

Definición 1.2.12 Sea S un convexo cerrado no vacío. Un **hiperplano soportante** de S es un hiperplano H tal que $H \cap S \neq \emptyset$ y $\{S \subseteq H^+ \vee S \subseteq H^-\}$.

Esto se muestra en la Figura 1.12.

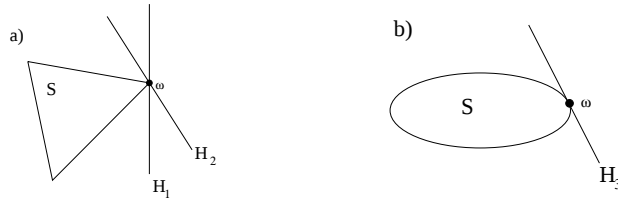


Figura 1.12: Para la figura a), H_1 y H_2 son dos hiperplanos soportantes en el punto señalado.

Cuando definimos los poliedros, los caracterizamos como una intersección finita de semiespacios. El siguiente teorema nos permitirá deducir una caracterización similar para un conjunto convexo no vacío cualquiera.

Teorema 1.2.9 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y sea $\bar{x}$ un punto en la frontera de S . Entonces S tiene un hiperplano soportante en $\bar{x}$.

Corolario 1.2.3 Sea S un convexo cerrado no vacío. Entonces

$$S = \bigcap \{W \text{ semiespacio} / S \subseteq W\}$$

Observación 1.2.7 Note que la intersección anterior no es necesariamente finita.

Demostración. Basta tomar los semiespacios generados por todos los hiperplanos soportantes del convexo, que contengan a S . ■

Teorema 1.2.10 (Farkas) Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$. Uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- (1) $Ax \leq 0$, $c^T x > 0$
- (2) $A^T y = c$, $y \geq 0$

Demostración. Supongamos que (2) tiene solución, es decir, que existe $y \geq 0$ tal que $A^T y = c$.

Si (1) tuviese solución, existiría $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq 0$, $c^T x > 0$. Premultiplicando la primera desigualdad por $y \geq 0$, se tiene que $y^T Ax = (A^T y)^T x = c^T x \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto (1) no tiene solución.

Supongamos ahora que (2) no tiene solución. Sea $S = \{\omega \in \mathbb{R}^n / \omega = A^T y, y \geq 0\}$, que es un convexo, cerrado y no vacío.

Como (2) no tiene solución, entonces $c \notin S$. Luego existen $p \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle p, c \rangle > \alpha \quad \text{y} \quad \langle p, \omega \rangle \leq \alpha, \forall \omega \in S.$$

Como $\omega = 0 \in S$, $\alpha \geq 0$, lo que implica

$$\langle p, c \rangle > 0 \tag{1.3}$$

De $\langle p, \omega \rangle \leq \alpha \quad \forall \omega \in S$, se tiene que $\langle p, A^T y \rangle = \langle Ap, y \rangle \leq \alpha, \forall y \geq 0$.

Supongamos que Ap tiene una coordenada estrictamente positiva, digamos $(Ap)_1$, y con-

sideremos $y = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$. Entonces $\lambda(Ap)_1 \leq \alpha \quad \forall \lambda > 0$, lo que es una contradicción,

pues se puede elegir λ suficientemente grande de modo de violar la desigualdad, dado que $(Ap)_1 > 0$. Luego, Ap no tiene coordenadas positivas, es decir,

$$Ap \leq 0 \tag{1.4}$$

De (1.3) y (1.4) se deduce que (1) tiene solución para $x = p$. ■

Ejercicio 1.2.5 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$. Uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- (1) $Ax \leq 0$, $x \geq 0$, $c^T x > 0$
- (2) $A^T u \geq c$, $u \geq 0$

Basta considerar la matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ y aplicar Farkas. ■

Teorema 1.2.11 Sean S_1 y S_2 , conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Existe un hiperplano que separa S_1 y S_2 , es decir, existe $p \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que

$$p^T x_1 \geq p^T x_2 \quad \forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2.$$

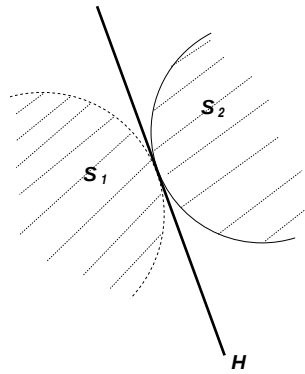


Figura 1.13: En el caso de la figura, el hiperplano separador de los dos conjuntos convexos es soportante para la clausura de ambos.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$S = \{x/x = x_2 - x_1, \quad x_1 \in S_1, \quad x_2 \in S_2\} = S_2 - S_1.$$

Se deduce del Ejercicio (1.2.1) que S es un convexo. Además, es claro que $0 \notin S$ (en efecto, $0 \in S$ implicaría que $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$). Luego, usando el Teorema 1.2.8, existe $p \neq 0$ tal que

$$p^T x \leq 0 \quad \forall x \in S$$

de donde se concluye que

$$p^T(x_2 - x_1) \leq 0 \quad \forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2$$

lo que prueba el teorema. ■

Teorema 1.2.12 (Gordan) Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Entonces uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- (1) $Ax < 0$
- (2) $A^T p = 0, p \geq 0, p \neq 0$

Demostración. Supongamos primero que (1) tiene solución, es decir, que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax < 0$. Demostraremos que (2) no tiene solución. Si no, existiría $p \in \mathbb{R}^m, p \geq 0, p \neq 0$ tal que $A^T p = 0$.

Entonces, premultiplicando (1) por p^T se obtiene que $p^T Ax < 0$, lo que contradice que $A^T p = 0$.

Supongamos ahora que (1) no tiene solución. Demostraremos que (2) posee solución. Si no, definamos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{R}^m / z = Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \quad y \quad S_2 = \{z \in \mathbb{R}^m / z < 0\}$$

Como (1) no tiene solución, entonces tenemos

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= \emptyset \\ S_1 &\neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset \\ S_1 \quad y \quad S_2 &\text{ convexos} \end{aligned}$$

Entonces, por teorema anterior (separación de dos convexos), existe un hiperplano separador; es decir existe $p \neq 0$ tal que

$$p^T z_1 \geq p^T z_2 \quad \forall z_1 \in S_1, z_2 \in S_2$$

Luego,

$$p^T Ax_1 \geq p^T z_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n, z_2 \in S_2 \tag{1.5}$$

lo cual implica que

$$p^T Ax_1 \geq \sup_{z_2 < 0} \{p^T z_2\}.$$

Probaremos que $p \geq 0$. Si p tiene alguna coordenada negativa, entonces el supremo del lado derecho de esta desigualdad es igual a $+\infty$. Se deduce entonces que $p^T Ax_1 = +\infty, \forall x_1 \in \mathbb{R}^n$, lo que es una contradicción. Así, $p \geq 0$.

Luego, tomando límite $z_2 \rightarrow 0^-$ en (1.5), se tiene que $p^T Ax_1 \geq 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}^n$. Eligiendo $x_1 = -A^T p$, se tiene que $\|A^T p\| = 0$ lo que implica $A^T p = 0$. Esto demuestra que (2) tiene solución. ■

1.3. Funciones convexas

Definición 1.3.1 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Se dice que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función convexa** si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Esta definición se puede interpretar geométricamente, diciendo que la imagen por f del segmento $[x, y]$ queda por debajo de la recta que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ (ver Figura 1.14).

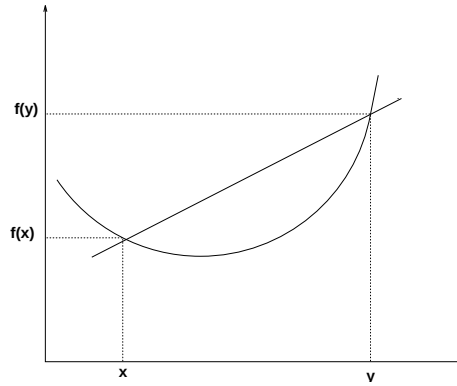


Figura 1.14: Función convexa: imagen del segmento $[x, y]$ queda por debajo de la recta que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

Es posible probar la siguiente definición equivalente de convexidad de funciones.

Definición 1.3.2 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Se dice que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función convexa** si $\forall k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in S$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, se tiene

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k).$$

Definición 1.3.3 Una función f , definida sobre un convexo S , se dice **estrictamente convexa** si para todo $x, y \in S$, $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$, se tiene

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Definición 1.3.4 Se dice que $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es **cóncava** si $-f$ es convexa o, equivalentemente, si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Del mismo modo, f es **estrictamente cóncava** si $-f$ es estrictamente convexa.

Ejemplo 1.3.1 .

i) Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha^T x + \beta$ (lineal afín) es cóncava y convexa.

ii) La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1[\\ x & \text{si } x \in [1, \infty[\end{cases}$$

(lineal por pedazos) no es convexa ni cóncava.

iii) La función $f(x) = -x^2$ es estrictamente cóncava.

iv) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \\ 4 & \text{si } x \in]2, \infty[\end{cases}$$

no es convexa ni cóncava.

A continuación enunciamos y demostramos (a modo de ejercicio de cálculo en varias variables reales) el teorema que garantiza la continuidad de las funciones convexas en el interior de su dominio.

Teorema 1.3.1 Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces, f es continua en el interior de S .

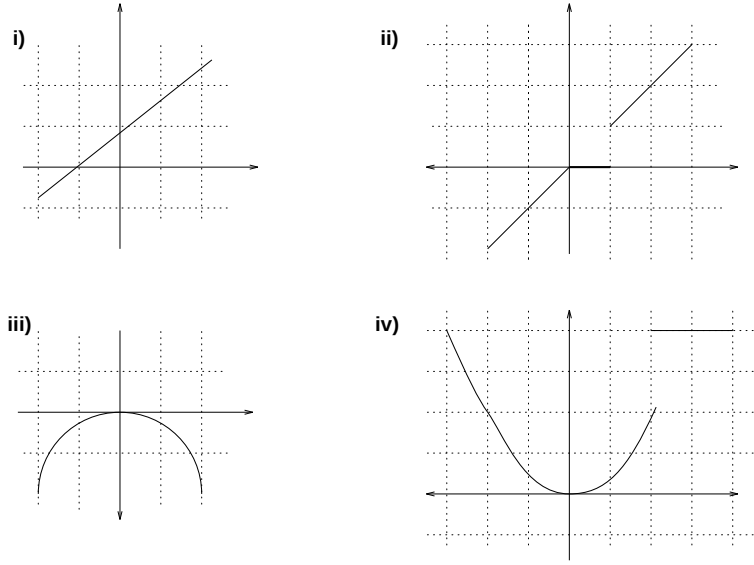


Figura 1.15: Gráfico de las funciones del Ejemplo 1.3.1

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{int}(S)$. Para probar la continuidad de f en $\bar{x}$ necesitamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$.

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Dado que $\bar{x} \in \text{int}(S)$ existe $\eta > 0$ tal que la bola de centro $\bar{x}$ y radio η está incluida en S , es decir, $B(\bar{x}, \eta) \subseteq S$.

Claramente $\bar{x} \pm \eta e_i \in S$, con e_i vector de la base canónica. Luego, es claro que

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \eta e_i) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \eta e_i)$$

y esto implica (por convexidad de f)

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}f(\bar{x} + \eta e_i) + \frac{1}{2}f(\bar{x} - \eta e_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

de donde

$$0 \leq \frac{1}{2}\{f(\bar{x} + \eta e_i) - f(\bar{x})\} + \frac{1}{2}\{f(\bar{x} - \eta e_i) - f(\bar{x})\}.$$

De aquí se desprende que $\forall i$, $f(\bar{x} + \eta e_i) - f(\bar{x})$ y $f(\bar{x} - \eta e_i) - f(\bar{x})$ no pueden ser simultáneamente negativos.

Sea $K = \max\{f(\bar{x} \pm \eta e_i) - f(\bar{x}), \quad \forall i = 1, \dots, n\}$, $0 \leq K < \infty$, y definamos $\delta = \min\{\frac{\eta}{n}, \frac{\varepsilon \eta}{nK}\}$.

Sean $\alpha_i \geq 0$ $i = 1, \dots, n$, tales que $x - \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$, con

$$d_i = \begin{cases} \eta e_i & \text{si } x_i - \bar{x}_i \geq 0 \\ -\eta e_i & \text{si } x_i - \bar{x}_i < 0 \end{cases}$$

Luego, $\|x - \bar{x}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j d_i d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|d_i\|^2 = \eta^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \delta^2$.

Así, se tiene que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \frac{\delta^2}{\eta^2} = \min\left\{\frac{1}{n^2}, \frac{\varepsilon^2}{n^2 K^2}\right\}$, lo que implica en particular que

$$\alpha_i \leq \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{\varepsilon}{nK}\right\} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - \bar{x} + \bar{x}) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + \bar{x}\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (n\alpha_i d_i + \bar{x})\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(n\alpha_i d_i + \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[(1 - n\alpha_i)\bar{x} + n\alpha_i(\bar{x} + d_i)] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - n\alpha_i)f(\bar{x}) + n\alpha_i f(\bar{x} + d_i)] \\ &= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + d_i) - f(\bar{x})] \end{aligned}$$

Luego (de la definición de K y por la cota establecida para α_i más arriba),

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + d_i) - f(\bar{x})] \leq K \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \varepsilon$$

Para terminar, falta probar que $f(\bar{x}) - f(x) \leq \varepsilon$.

Sea $y = 2\bar{x} - x$. Notemos que $\|y - \bar{x}\| = \|\bar{x} - x\| \leq \delta$, luego, $f(y) - f(\bar{x}) \leq \varepsilon$.

Pero $f(\bar{x}) = f(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x)$ implica que

$$\frac{1}{2}[f(\bar{x}) - f(x)] \leq \frac{1}{2}[f(y) - f(\bar{x})] \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Luego, $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$ y se tiene el resultado. ■

Una función convexa podría no ser continua en todo su dominio, sin embargo, el teorema anterior dice que los puntos de discontinuidad se encuentran en la frontera, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2 Sea $S = \{x / |x| \leq 1\}$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| = 1 \end{cases}$

La función f es convexa, continua en $\text{int}(S)$ y los puntos de discontinuidad $\{-1, 1\}$ están en la frontera de S .

1.3.1. Conjuntos relevantes asociados a funciones convexas

Definición 1.3.5 Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $S \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen los siguientes conjuntos (ver Figura 1.16)

- $N_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$, el **conjunto de nivel** α .
- $C_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = \alpha\}$, **curva de nivel** α .
- $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} / f(x) \leq \alpha\}$, el **epígrafo de** f .

Teorema 1.3.2 Sea una función $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con S convexo. Se tiene que

- (i) f es convexa si y sólo si $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo
- (ii) Si f es convexa, entonces $N_\alpha(f)$ es convexo.

Demostración.

(i) Sea f convexa. Sean $(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi}(f)$, $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, por convexidad

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) \in S \times \mathbb{R}$$

Como f es convexa, entonces

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta,$$

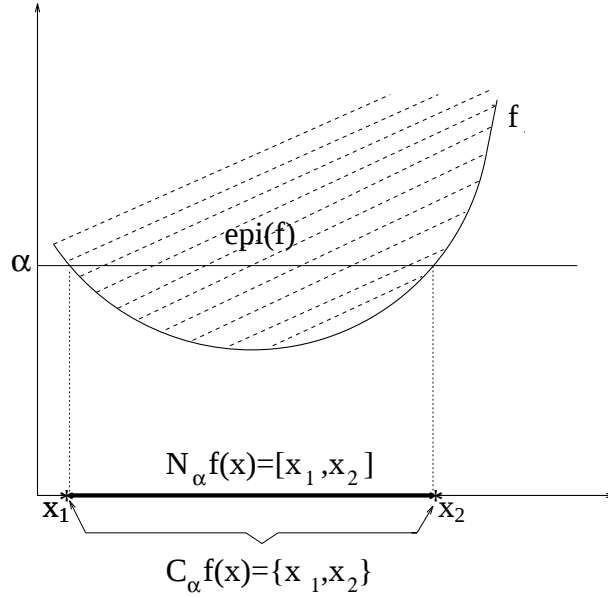


Figura 1.16: Conjunto de nivel, curva de nivel y epígrafo de una función real f .

puesto que $f(x) \leq \alpha$ y $f(y) \leq \beta$. Luego,

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) \in \text{epi}(f),$$

por lo tanto $\text{epi}(f)$ es convexo.

Sea ahora $\text{epi}(f)$ un conjunto convexo. Claramente se tiene que $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi}(f)$ y, por lo tanto, para $\lambda \in [0, 1]$ se tiene

$$\lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(y, f(y)) \in \text{epi}(f).$$

Es decir,

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \in \text{epi}(f),$$

de donde se concluye que f es convexa.

(ii) Sean $x, y \in N_\alpha(f)$. Se tiene que $f(x) \leq \alpha$ y $f(y) \leq \alpha$, por lo tanto

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \alpha$$

de donde $\lambda x + (1 - \lambda)y \in N_\alpha(f)$. ■

La reciproca de (ii) no es cierta: para la función (iv) del Ejemplo 1.3.1, $N_\alpha(f)$ es convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, sin embargo la función no es convexa.

1.3.2. Funciones convexas diferenciables

Definición 1.3.6 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in S$, y $d \neq 0$ tal que

$$\bar{x} + \lambda d \in S \quad \forall \lambda \in [0, \eta[, \text{ algún } \eta > 0.$$

Se define la **derivada direccional** de f en el punto $\bar{x}$, en la dirección d , por (cuando el límite existe)

$$f'(\bar{x}, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \in \bar{\mathbb{R}}$$

donde $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definición 1.3.7 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **diferenciable** en $\bar{x} \in \text{int}(S)$ si existe $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

donde $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$.

Teorema 1.3.3 Si f es diferenciable en el interior de S , entonces $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{int}(S)$, como f es diferenciable se tiene que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S.$$

Sea $x = \bar{x} + \lambda d \in S$ (para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño), luego

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (\lambda d) + o(\lambda d)$$

implica

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} = \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(\lambda d)}{\|\lambda d\|} \|d\|$$

Tomando límite cuando $\lambda \rightarrow 0^+$, se obtiene $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$. ■

La siguiente proposición garantiza la existencia de la derivada direccional de las funciones convexas (bajo ciertas hipótesis generales).

Proposición 1.3.1 Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, convexa. Sean $\bar{x} \in S$, y $d \neq 0$ tales que existe $\eta > 0$ que cumple $\bar{x} + \lambda d \in S$, para todo $\lambda \in [0, \eta[$. Entonces $f'(\bar{x}, d)$ existe.

Demostración. Sean $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \eta$. Entonces

$$f(\bar{x} + \lambda_1 d) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\bar{x}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2}f(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)f(\bar{x})$$

implica

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda_1 d) - f(\bar{x})}{\lambda_1} \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda_2 d) - f(\bar{x})}{\lambda_2}$$

Así, la función $\varphi(\lambda) = \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$ es monótona (no decreciente) y por lo tanto $\inf_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$ existe (estamos en $\bar{\mathbb{R}}$).

Pero $\inf_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi(\lambda) = f'(\bar{x}, d)$, luego la derivada direccional existe. ■

El teorema siguiente permite caracterizar la convexidad de las funciones diferenciables, estableciendo que el hiperplano soportante de la función, en un punto cualquiera de la frontera del epígrafo, acota inferiormente a la función.

Teorema 1.3.4 (Caracterización de convexidad en el caso diferenciable) Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $S \subseteq \mathbb{R}^n$, convexo. Entonces f es convexa si y sólo si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea f convexa. Dados $x, \bar{x} \in S$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Reordenando, tenemos que

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\lambda} \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in [0, 1[$$

y tomando límite $\lambda \rightarrow 0^+$:

$$f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x})$$

que implica

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad \forall \bar{x}, x \in S.$$

($\Leftarrow$) Sean $x, \bar{x} \in S$. Entonces,

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}), (1 - \lambda)(x - \bar{x}) \rangle \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\bar{x}) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}), \lambda(\bar{x} - x) \rangle \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Multiplicando la primera desigualdad por λ , la segunda por $(1 - \lambda)$ y sumando, se tiene

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Es decir, f es convexa. ■

Observación 1.3.1 Es directo probar que f , satisfaciendo las hipótesis del teorema anterior, es estrictamente convexa si y sólo si $f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$, $\forall x, \bar{x} \in S$, $x \neq \bar{x}$.

Corolario 1.3.1 Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $S \subseteq \mathbb{R}^n$, convexo. Entonces f es convexa si y sólo si $\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$, $\forall x_1, x_2 \in S$.

Demostración. De acuerdo al teorema anterior,

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_2) + \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle & \forall x_1, x_2 \in S \\ f(x_2) &\geq f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle & \forall x_1, x_2 \in S \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores, se tiene que

$$0 \geq \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle = \langle -\nabla f(x_2) + \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle$$

es decir, $\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in S$. ■

Definición 1.3.8 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **dos veces diferenciable** en $\bar{x}$ si existe $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ y $H(\bar{x}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

donde $\frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \bar{x}$

La matriz $H(\bar{x})$ se llama **matriz Hessiana** de f en $\bar{x}$:

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Teorema 1.3.5 (*Caracterización de convexidad para una función dos veces diferenciable*)
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, convexo, no vacío, y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en S .
Entonces f es convexa si y sólo si $H(x)$ es semi-definida positiva $\forall x \in S$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\bar{x} \in S$. Queremos probar que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^T H(\bar{x}) x \geq 0$.

Como S es abierto, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} + \lambda x \in S$, para λ suficientemente pequeño. Del Teorema (1.3.4) se tiene que

$$f(\bar{x} + \lambda x) \geq f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Además,

$$f(\bar{x} + \lambda x) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x + \frac{\lambda^2}{2} x^T H(\bar{x}) x + o(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Restando las dos ecuaciones, se tiene que

$$0 \geq -\frac{\lambda^2}{2} x^T H(\bar{x}) x - o(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$x^T H(\bar{x}) x + \frac{2}{\lambda^2} o(\lambda x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para $x \neq 0$ (el caso $x = 0$ es directo), dividamos por $\|x\|^2$ y tomemos límite cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ para obtener que $x^T H(\bar{x}) x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, es decir, que $H(\bar{x})$ es semi-definida positiva.

($\Leftarrow$) Sean $x, \bar{x} \in S$. Por teorema del valor medio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x})$$

con $\hat{x} = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x \in S$, para algún $\lambda \in]0, 1[$.

Como $H(\hat{x})$ es semi-definida positiva, $(x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x}) \geq 0$, luego

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S$$

Por el Teorema 1.3.4, f es convexa. ■

Ejemplo 1.3.3 Sea $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$. Deseamos verificar si f es convexa, cóncava o ninguna de ellas.

Podemos escribir f de una manera más conveniente como sigue:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10, & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10, & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $H(x) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$ (no depende explícitamente de x).

Calculemos sus valores propios:

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & -10 - \lambda \end{bmatrix} = (2 + \lambda)(10 + \lambda) - 4 = \lambda^2 + 12\lambda + 16 = 0$$

de donde $\lambda_1 = -1,5279$ y $\lambda_2 = -10,4721$.

Como ambos valores son negativos, $H(x)$ es definida negativa. Luego, por el teorema anterior, f es cóncava. Más aún, como lo demuestra el siguiente resultado, f es estrictamente cóncava.

Corolario 1.3.2 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, convexo, no vacío, y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en S . Se tiene que,

- (i) si $H(x)$ es definida positiva en cada punto de S , entonces f es estrictamente convexa.
- (ii) si f es estrictamente convexa, entonces $H(x)$ es semi-definida positiva en todo punto de S .

Demostración.

(i) Directo de la segunda implicancia del teorema anterior. Basta ver $H(x)$ definida positiva implica que $f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S, x \neq \bar{x}$, lo que por la Observación 1.3.1 es equivalente a decir que f es estrictamente convexa.

(ii) Notar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{x^T}{\|x\|} H(\bar{x}) \frac{x}{\|x\|} + 2 \frac{o(\lambda x)}{\lambda^2 \|x\|^2} \right) > 0$$

implica $x^T H(\bar{x}) x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, es decir, $H(\bar{x})$ es semi-definida positiva. ■

Capítulo 2

Caracterización de optimalidad

2.1. Definición del problema de Optimización

En este capítulo trataremos el problema:

$$(P) \min_{x \in S} f(x)$$

Con $S \subseteq \mathbb{R}^n$, generalmente definido por ecuaciones no necesariamente lineales, que llamaremos *región factible* y f una función cualquiera. Ciertamente, si S es un poliedro y f es lineal entonces se trata del caso de la Programación Lineal.

Definición 2.1.1 *Un punto $x^* \in S$ se dirá **mínimo local** de f si existe $\epsilon > 0$ que cumpla $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in S$ tal que $\|x^* - x\| < \epsilon$. Es decir, existe una vecindad de x^* donde dicho punto es mínimo.*

Definición 2.1.2 *Un punto $x^* \in S$ se dirá **mínimo global** de f en S si $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in S$. Es decir, x^* es solución de (P) .*

En términos del lenguaje utilizado, un elemento $\bar{x} \in S$ se llama **solución factible** de (P) y si $\bar{x}$ resuelve (P) se puede decir que es **solución, solución óptima, mínimo, o solución global** del problema.

Teorema 2.1.1 *Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, con S convexo no vacío, y sea $\bar{x}$ una solución local del problema (P) . Entonces,*

(i) Si f es convexa, $\bar{x}$ es mínimo global.

(ii) Si f es estrictamente convexa, $\bar{x}$ es el único mínimo global.

Demostración.

(i) Sea $\varepsilon > 0$ tal que $f(\bar{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in S \mid \|\bar{x} - x\| < \varepsilon\}$ y supongamos que $\bar{x}$ no es óptimo global.

Es decir, existe $y \in S$ tal que $f(y) < f(\bar{x})$. Luego, para $\lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x}),$$

para λ suficientemente pequeño (en realidad basta con elegir $\lambda < \frac{\varepsilon}{\|y - \bar{x}\|}$), se tiene que $\lambda y + (1 - \lambda)\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{x})$, lo cual es una contradicción pues $\bar{x}$ es mínimo local en $V_\varepsilon(\bar{x})$.

(ii) Como f estrictamente convexa entonces f es convexa. Luego, por (i), $\bar{x}$ es mínimo global.

Supongamos que no es único, esto es, que existe $y \in S$, con $y \neq \bar{x}$, tal que $f(y) = f(\bar{x})$. Entonces

$$f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{x}\right) < \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

lo que implica que existe $z \in S$, $z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{x}$, distinto de $\bar{x}$, tal que $f(z) < f(\bar{x})$. Esto contradice el hecho que $\bar{x}$ es mínimo global. ■

2.2. Condiciones de optimalidad

2.2.1. Optimización sin restricciones

En esta sección, obtendremos condiciones necesarias y suficientes para resolver problemas no lineales irrestrictos (que es el caso en que $S = \mathbb{R}^n$), es decir problemas del tipo:

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

En general supondremos que f es una función una o dos veces continuamente diferenciable.

Teorema 2.2.1 (Condiciones necesarias de optimalidad) Sea x^* solución local de (P) y supongamos $f \in \mathcal{C}^2(S)$, donde S es un conjunto abierto que contiene a x^* . Entonces,

a) $\nabla f(x^*) = 0$ y

b) La matriz Hessiana $H(x^*)$ es semidefinida positiva.

Demostración. Sea $d \in \mathbb{R}^n$, no nulo dado y consideremos la función $g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$.

a) Como x^* es un mínimo local de f se tiene que:

$$f(x^*) \leq f(x^* + \alpha d) \quad \forall \alpha > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Es decir,

$$0 \leq \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha}.$$

Tomando límite,

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha} = g'(0)$$

Ahora, por la regla de la cadena se tiene que $g'(\alpha) = \nabla f(x^* + \alpha d)^T d$, lo que implica que $g'(0) = \nabla f(x^*)^T d$, por lo tanto

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T d.$$

Como d es arbitrario, tomando $d = \pm e_i$, siendo e_i el i -ésimo vector de la base canónica, se deduce que $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0$ y por lo tanto $\nabla f(x^*) = 0$.

b) Consideremos el desarrollo de Taylor de segundo orden,

$$g(\alpha) = g(0) + g'(0)\alpha + \frac{1}{2}g''(0)\alpha^2 + o(\alpha^2),$$

donde la función $o(t)$ cumple $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Considerando que $g'(\alpha) = \nabla f(x^* + \alpha d)^T d$ y $g''(\alpha) = d^T H(x^* + \alpha d)d$, la expresión anterior se escribe

$$f(x^* + \alpha d) - f(x^*) = \alpha \nabla f(x^*)^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T H(x^*) d + o(\alpha^2),$$

por lo tanto, como $\nabla f(x^*) = 0$ y $f(x^* + \alpha d) - f(x^*) \geq 0$, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que

$$0 \leq d^T H(x^*) d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}$$

Tomando $\alpha \rightarrow 0$ se obtiene que $H(x^*)$ es semidefinida positiva. ■

En relación a las condiciones suficientes, se puede fácilmente probar los siguientes teoremas, para el caso de funciones convexas (las demostraciones quedan como ejercicio de cálculo).

Teorema 2.2.2 *Sea f una función convexa y diferenciable sobre un conjunto convexo S , abierto. Entonces $\nabla f(x^*) = 0$ es una condición necesaria y suficiente para que $x^* \in S$ sea un mínimo global de f sobre S .*

Teorema 2.2.3 (Condiciones suficientes de optimalidad, caso general) *Sea $f \in C^2(S)$, con S abierto. Supongamos que $x^* \in S$ satisface:*

- a) $\nabla f(x^*) = 0$.
- b) *La matriz $H(x^*)$ es definida positiva.*

Entonces, x^ es un mínimo local estricto de f en S .*

2.2.2. Optimización con restricciones

Para el caso con restricciones, las condiciones de optimalidad son algo más complicadas que para el caso irrestricto. Comencemos con algunas definiciones previas.

Definición 2.2.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que $d \in \mathbb{R}^n$ es **dirección de descenso** de f en $\bar{x}$ si $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.*

Definición 2.2.2 *Sea S un conjunto no vacío en $\mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in S$. Se llama **cono de direcciones admisibles** de S en $\bar{x}$ al conjunto:*

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{d / d \neq 0, \bar{x} + \lambda d \in S, \forall \lambda \in [0, \eta[\text{ para algún } \eta > 0\}$$

Denotaremos por $\mathcal{D}(\bar{x}) = \{d / \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$ al conjunto de direcciones de descenso.

Además, por simplicidad notacional y si no hay posible confusión, escribiremos $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\bar{x})$ y $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\bar{x})$. Ambos conjuntos pueden ser vacíos.

Teorema 2.2.4 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\bar{x} \in S$. Si $\bar{x}$ es mínimo local del problema

$$(P) \quad \min_{x \in S} f(x)$$

entonces, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que existe $d \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$, entonces

$d \in \mathcal{A} \implies$ existe $\eta > 0$ tal que $\bar{x} + \lambda d \in S$, $\lambda \in [0, \eta[$ y

$d \in \mathcal{D} \implies$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$, $\lambda \in [0, \varepsilon[$.

Luego $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$, para todo $\lambda \in]0, \min\{\varepsilon, \eta\}[$, lo que contradice la minimalidad local de $\bar{x}$. ■

Muy frecuentemente el conjunto factible S está descrito mediante una sistema de inecuaciones, que denominaremos **restricciones**. Sean $g_1, \dots, g_m$, funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, diferenciables. Consideremos también el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

que es un convexo cuando las funciones $g_1, \dots, g_m$ son convexas en $\mathbb{R}^n$ (dejamos al lector la tarea de probar esta afirmación y encontrar un contraejemplo para la afirmación recíproca).

Entonces el problema (P) se escribe

$$(P) \quad \min_{g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m} f(x)$$

Definición 2.2.3 Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Si una restricción g_i verifica $g_i(\bar{x}) = 0$ entonces se dice que es **activa** en $\bar{x}$. Además, $I = \{i / g_i(\bar{x}) = 0\}$ denota el conjunto de índices restricciones activas en $\bar{x}$.

Sea ahora el conjunto $\mathcal{G}(\bar{x}) = \{d / \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \forall i \in I\}$, el cual denotaremos simplemente por $\mathcal{G}$.

Teorema 2.2.5 Sea $\bar{x}$ un punto factible de (P) , es decir, $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$. Entonces, si $\bar{x}$ es mínimo local de f , se cumple que $\mathcal{G} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Demostración. Basta probar que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ y luego concluir usando el teorema anterior.

Sea $d \in \mathcal{G}$ y consideremos el caso $i \in I$. Entonces $\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$, luego existe $\eta_i > 0$ tal que

$$g_i(\bar{x} + \lambda d) < g_i(\bar{x}) \quad \lambda \in]0, \eta_i[.$$

Notar que el lado derecho de esta última desigualdad es nulo, entonces se tiene que

$$g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0 \quad \lambda \in]0, \eta[,$$

para $\eta = \min_{j \in I} \{\eta_j\}$.

Tomemos ahora $i \notin I$. Como $\bar{x}$ es factible, entonces cumple $g_i(\bar{x}) < 0$. De allí, por continuidad, se deduce que existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0 \quad \lambda \in [0, \varepsilon_i[$.

Sean $\varepsilon = \min_{i \notin I} \{\varepsilon_i\}$ y $\Delta = \min\{\eta, \varepsilon\}$. Entonces podemos decir que

$$g_i(\bar{x} + \lambda d) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall \lambda \in [0, \Delta[$$

Entonces $d \in \mathcal{A}$, lo que completa la demostración. ■

Teorema 2.2.6 (Karush-Kuhn-Tucker, desigualdades) *Sea $\bar{x}$ solución de (P) y supongamos que $\{\nabla g_i(\bar{x}), \quad i \in I\}$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces existen $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Demostración. Sabemos, del teorema anterior, que $\mathcal{D} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Entonces, no existe una dirección $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d &< 0 \quad i \in I \end{aligned}$$

Definiendo

$$A = \begin{bmatrix} \nabla f(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla g_i(\bar{x})^T \\ \vdots \end{bmatrix}_{i \in I}$$

podemos interpretar lo anterior como: no existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ad < 0$. Entonces, por el teorema de Gordan, existe $p \neq 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl} A^T p & = & 0 \\ p & \geq & 0 \end{array}$$

Notemos

$$p = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \in I}$$

entonces,

$$\mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

donde los coeficientes $\mu_0, \mu_i \geq 0$, para $i \in I$, no son todos nulos.

Afirmamos que $\mu_0 > 0$. En efecto, si $\mu_0 = 0$, entonces se tiene que $\sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, donde los coeficientes μ_i , $i \in I$ no son todos nulos. Eso contradice la hipótesis de independencia lineal.

Así, podemos redefinir los coeficientes $\mu_i \leftarrow \frac{\mu_i}{\mu_0}$, $\forall i \in I$, con lo cual

$$\begin{array}{rcl} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) & = & 0 \\ \mu_i & \geq & 0 \quad i \in I, \end{array}$$

donde los coeficientes μ_i $i \in I$, no son todos nulos.

También sabemos que $g_i(\bar{x}) = 0$ para $i \in I$ y que $g_i(\bar{x}) < 0$ para $i \notin I$, entonces definiendo $\mu_i = 0 \quad \forall i \notin I$, se concluye que

$$\begin{array}{rcl} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) & = & 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) & = & 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_i & \geq & 0 \quad i = 1, \dots, m, \end{array}$$

lo que completa la demostración. ■

Ejemplo 2.2.1 Veremos aquí cuán importantes son las hipótesis del teorema anterior. El siguiente es un problema clásico, que tiene como solución óptima el punto $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 \\ & -(1-x_1)^3 + x_2 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array}$$

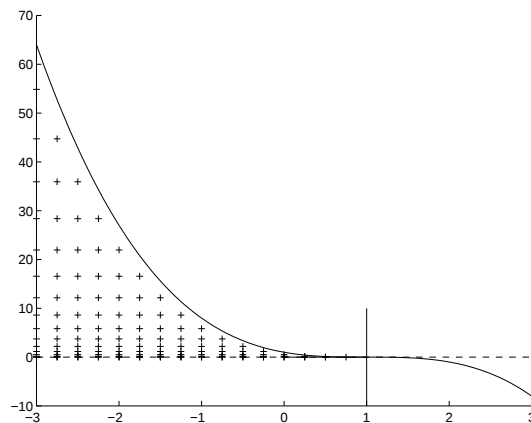


Figura 2.1: El teorema de KKT no es aplicable en el óptimo.

Como puede verse en la Figura (2.1), la versión del teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) no es aplicable en este caso, pues los gradientes de g_1 y g_2 no son linealmente independientes en x^* . En efecto,

$$\begin{aligned} \nabla g_1(x^*) &= \begin{pmatrix} 3(1-x_1^*)^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \nabla g_2(x^*) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \nabla f(x^*) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se observa que no existen $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ que satisfagan $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Interpretación geométrica del teorema de Karush-Kuhn-Tucker

El teorema de Karush-Kuhn-Tucker puede ser interpretado geoméricamente como sigue.

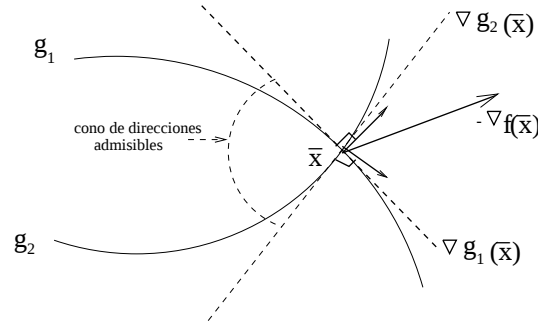


Figura 2.2: Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para dimensión dos.

Consideremos un problema en dos dimensiones como el que se muestra en la Figura 2.2. El cono de direcciones admisibles está dado por:

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{d \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad \forall i \in I = \{1, 2\}\}$$

Bajo la hipótesis de independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas, para que $\bar{x}$ sea un mínimo local, se necesita que el vector $-\nabla f(\bar{x})$ forme un ángulo obtuso con toda dirección admisible d , lo que equivale a decir que $-\nabla f(\bar{x})$ debe ser combinación lineal positiva de los vectores del conjunto $\{\nabla g_i(\bar{x}), \quad \forall i \in I\}$.

A continuación entregamos sin demostración el enunciado del teorema de Karush-Kuhn-Tucker, extendido al caso de restricciones de igualdad y desigualdad.

Teorema 2.2.7 (Karush-Kuhn-Tucker, igualdades y desigualdades) Sean las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, m$ y $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $j = 1, \dots, l$ diferenciables. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Sean $\bar{x}$ un punto factible. Supongamos que el conjunto $\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}), \quad i \in I, \quad j = 1, \dots, l\}$ es linealmente independiente.

Entonces, si $\bar{x}$ es solución de (P), existen $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $\nu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$ tales que

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l \nu_j \nabla h_j(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Tal como en el caso de desigualdades, la hipótesis de independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas es demasiado fuerte, y el teorema sigue siendo válido aún cuando esta hipótesis no se cumpla.

Ejemplo 2.2.2 Una aplicación interesante de esta versión del teorema de KKT es el caso de la programación lineal, que es el tema del próximo capítulo. Consideremos el problema

$$\begin{aligned}(P) \quad &\text{mín } c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0\end{aligned}$$

donde la matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y los vectores $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ son los datos del problema. Se puede escribir equivalentemente,

$$\begin{aligned}(P) \quad &\text{mín } c^T x \\ &-x \leq 0 \\ &Ax - b = 0\end{aligned}$$

de manera que las funciones f , g_i y h_j del problema general están dadas por

$$\begin{aligned}f(x) &= c^T x \\ g_i(x) &= -x_i \\ h_j(x) &= \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k - b_j\end{aligned}$$

Los gradientes respectivos son

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= c \\ \nabla g_i(x) &= -e_i \\ \nabla h_j(x) &= (a_{j1}, \dots, a_{jn})^T\end{aligned}$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Las ecuaciones de KKT en este caso se pueden escribir

$$c + \sum_{i=1}^n u_i(-e_i) + \sum_{j=1}^m v_j(a_{j1}, \dots, a_{jn})^T = 0$$

$$u_i(-x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Introduciendo el cambio de variable $y = -v$ se obtiene

$$A^T y + u = c$$

$$u^T x = 0$$

$$u \geq 0$$

Entonces la caracterización completa de la solución del problema de Programación Lineal es la siguiente: x es solución del problema (P) si y sólo si existen vectores $u \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, tales que

$$Ax = b$$

$$A^T y + u = c$$

$$u^T x = 0$$

$$x, u \geq 0$$

Este es un sistema difícil de resolver, dado que algunas variables deben ser positivas y además deben satisfacer una ecuación no lineal (ortogonalidad de x y u). Ms adelante, en el capítulo sobre la dualidad en Programación Lineal, daremos otra interpretación de este sistema.

Capítulo 3

Programación Lineal

3.1. Introducción y ejemplos

Un problema de programación lineal (o *programa lineal*) se escribe de manera explícita como:

$$\begin{array}{llllllll} (PL) & \text{mín} & c_1x_1+ & c_2x_2+ & \dots + & c_{n-1}x_{n-1}+ & c_nx_n & \\ & & a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \dots + & a_{1,n-1}x_{n-1}+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ & & a_{2,1}x_1+ & a_{2,2}x_2+ & \dots + & a_{2,n-1}x_{n-1}+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & a_{m,1}x_1+ & a_{m,2}x_2+ & \dots + & a_{m,n-1}x_{n-1}+ & a_{m,n}x_n & = b_m \\ & & & & & & x_i & \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array}$$

o en forma compacta como:

$$\begin{array}{ll} (PL) & \text{mín } c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde son dados $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, con $m \leq n$.

En la **función objetivo** o **criterio** $c^T x$, la variable x se conoce como **variable de decisión** o **nivel de actividad** y c como **vector de costos**.

El conjunto de restricciones $\mathcal{P} = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$ es un poliedro cerrado y se llama **conjunto factible**. La matriz A se conoce como la **matriz de coeficientes técnicos** y b como **vector de recursos** o, simplemente, **lado derecho**.

Observación 3.1.1 *Se cumple:*

- Si $\mathcal{P}$ es acotado, entonces existe solución, pues se minimiza una función (lineal) continua sobre un conjunto compacto (el poliedro $\mathcal{P}$ es cerrado).
- Si $\mathcal{P}$ es no acotado, puede ocurrir que $c^T x \rightarrow -\infty$, con $x \in \mathcal{P}$.

Definición 3.1.1 *Tres posibilidades para un problema (PL):*

- Se dirá que el problema (PL) es **acotado** si existe $\bar{z} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{z} \leq c^T x, \forall x \in \mathcal{P}$.
- Se dirá que el problema (PL) es **no acotado** si existen $d \in \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathcal{P}$ tales que $x_0 + \lambda d \in \mathcal{P}, \forall \lambda \geq 0$ y $c^T(x_0 + \lambda d) \rightarrow -\infty$ si $\lambda \rightarrow \infty$.
- Se dirá que el problema (PL) es **infactible** si $\mathcal{P} = \emptyset$.

Observación 3.1.2 *Es evidente que si (PL) es no acotado, entonces $\mathcal{P}$ es no acotado. La otra implicancia no siempre es cierta, como veremos cuando estudiemos cómo resolver un programa lineal.*

Formas canónicas de un programa lineal

Dos formas habituales de escribir (PL) para su estudio son:

1) Forma de desigualdad:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \end{array}$$

2) Forma estándar o canónica:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Estas dos formas son equivalentes pues los poliedros $\{x/Ax = b, x \geq 0\}$ y $\{x/Ax \leq b\}$ son equivalentes, en el sentido que se puede pasar de una forma a otra mediante cambios simples en las variables y restricciones, como por ejemplo:

- Pasar de $\geq$ a $\leq$ multiplicando la restricción por -1 .
- Pasar de $\leq$ a $=$ usando una variable de holgura, es decir:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \text{ puede escribirse en la forma } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_j,$$

con $x_{n+1} \geq 0$. Notar que en este caso el problema aumenta en una variable por cada restricción de desigualdad convertida en igualdad.

- Una variable irrestricta x puede ser reemplazada por dos variables no negativas $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, escribiendo $x = x_1 - x_2$
- Maximizar $c^T x$ es equivalente a minimizar $-c^T x$

Ejemplo 3.1.1 *El problema*

$$\begin{array}{rcll} \text{máx} & c_1x_1 + & c_2x_2 & \\ & x_1 - & 3x_2 & \geq 8 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{array}$$

es equivalente al problema (haciendo $x_2 = u - v$, con $u, v \geq 0$).

$$\begin{array}{rcll} - \text{mín} & -c_1x_1 - & c_2u + & c_2v \\ & -x_1 + & 3u - & 3v & \leq -8 \\ & & & x_1, u, v & \geq 0 \end{array}$$

que a su vez, es equivalente al problema:

$$\begin{array}{rcll} - \text{mín} & -c_1x_1 - & c_2u + c_2v & \\ & -x_1 + & 3u - 3v & + y = -8 \\ & & x_1, u, & v, y \geq 0 \end{array}$$

Plantear un problema de optimización requiere comprender la estructura del mismo y ser ordenado y creativo a la hora de darle forma.

3.2. Resolución de problemas de Programación Lineal: algoritmo Simplex

Teorema 3.2.1 *Sea $\mathcal{P}$ un poliedro no vacío en la forma canónica y sea el problema*

$$(P) \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & x \in \mathcal{P} \end{array}$$

Entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(i) (P) es no acotado.

(ii) (P) tiene un vértice (punto extremo) como solución.

Demostración. Supongamos que existe una dirección extrema d tal que $c^T d < 0$. Entonces, dado que el poliedro es no vacío, elijamos $x_0 \in \mathcal{P}$. Es evidente que $x_0 + \alpha d \in \mathcal{P}$ y que $c^T(x_0 + \alpha d) \rightarrow -\infty$, si $\alpha \rightarrow \infty$. Entonces (P) es no acotado, lo que prueba (i).

Contrariamente, si no existe una dirección extrema d (en particular, si el poliedro es acotado, es decir, no existen direcciones extremas) tal que $c^T d < 0$, entonces aplicando el teorema de representación de puntos de un poliedro al punto x_0 se tiene que

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

donde $\lambda_i \in [0, 1]$, $\forall i = 1, \dots, k$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\mu_j \geq 0$, $\forall j = 1, \dots, l$.

Entonces,

$$c^T x_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j c^T d_j$$

Dado que $\sum_{j=1}^l \mu_j c^T d_j \geq 0$ entonces

$$c^T x_0 \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i$$

y si elegimos q tal que $c^T x_q = \min\{c^T x_1, \dots, c^T x_k\}$ entonces

$$c^T x_0 \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_q = c^T x_q$$

lo que muestra que x_q es solución de (P) , puesto que x_0 es arbitrario en $\mathcal{P}$. Es decir, la solución se encuentra en un punto extremo. Esto termina la prueba. ■

Motivación: solución gráfica en $\mathbb{R}^2$

Consideremos el siguiente problema lineal

$$(P) \quad \begin{array}{rcl} \text{mín} & -2x_1 & +3x_2 \\ & 2x_1 & -x_2 \leq 3 \\ & -x_1 & +2x_2 \leq 2 \\ & & x_2 \geq 1 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Gráficamente, en un problema de minimización, lo que se hace es desplazar la recta que representa los costos en la dirección $-c$, que es la dirección de máximo descenso. Con esto tenemos que el valor óptimo será aquel último punto factible que alcance la función objetivo en su descenso.

Desgraciadamente, para dimensión mayor o igual a 3, ya no es posible resolver estos problemas de manera gráfica.

Vimos que para poder resolver un problema de programación lineal necesitamos sólo considerar los vértices del poliedro $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ como candidatos a solución óptima del problema. Para un número grande de variables (n) y restricciones (m) vimos también que el número de vértices puede ser enorme, $\binom{n}{m}$, por lo que una metodología más sistemática se hace necesaria.

3.2.1. Fase II del algoritmo Simplex: mejorar solución en curso

El método Simplex, desarrollado por George Dantzig en los años cuarenta, tiene una idea geométrica muy simple: primero se encuentra una base factible (un vértice de $\mathcal{P}$) y luego se pasa de vértice a otro, a través de las aristas de $\mathcal{P}$ que sean direcciones de descenso para la función objetivo, generando una sucesión de vértices cuyos valores por $z(x) = c^T x$ son decrecientes, con lo que se asegura que un mismo vértice no es visitado dos veces. Así, como el número de vértices es finito, el algoritmo converge en tiempo finito; esto significa que encuentra una solución óptima, o una arista a lo largo de la cual la función objetivo es no acotada.

A la búsqueda de una base factible se la llama Fase I del algoritmo Simplex (esto se verá más adelante). El resto del procedimiento (que describiremos a continuación) se conoce como Fase II.

Consideremos el problema

$$(P) \min_{x \in \mathcal{P}} c^T x$$

con $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$.

Supondremos que $A \in \mathcal{M}_{mn}$ es de rango m , entonces puede escribirse de la forma $A = [B, N]$, con $B \in \mathcal{M}_{mm}$ invertible.

Notemos $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$. Entonces, $Ax = Bx_B + Nx_N = b$ con lo que finalmente $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Definición 3.2.1 Las coordenadas del vector x_B se denominan **variables básicas** y las del vector x_N son las **variables no básicas**. Análogamente, a la matriz invertible B se le llama **base** y si se cumple que $B^{-1}b \geq 0$ entonces se dice **base factible**.

El problema (P) es equivalente a

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que la función objetivo original

$$z(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

coincide con la función

$$\hat{z}(x_N) = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N,$$

para $x \in \mathcal{P}$. Entonces, minimizar $z(x)$ es equivalente a minimizar $\hat{z}(x_N)$.

Si $B^{-1}b \geq 0$ entonces se tiene la solución $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$, que es un punto extremo en el cual la función objetivo toma el valor $z(x) = c_B^T B^{-1}b$.

Si se cumple que $c_N^T - c_B^T B^{-1}N \geq 0$, entonces la solución es óptima, puesto que no es aconsejable dar valor positivo a las variables en x_N (la función objetivo $\hat{z}$ no podría decrecer al hacer eso).

Definición 3.2.2 La cantidad $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ es un vector fila que se conoce como **vector de multiplicadores del Simplex**. Esta terminología proviene de la interpretación de las coordenadas de π como multiplicadores de Lagrange. Daremos más adelante una interpretación económica de estos multiplicadores.

Definición 3.2.3 El vector fila $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ se denomina vector de **costos reducidos**.

A continuación examinaremos por separado, con la ayuda de un ejemplo, los tres casos que pueden aparecer cuando estamos en presencia de un punto extremo y a partir de esto generaremos la formulación general del Algoritmo Simplex.

CASO 1: criterio de optimalidad

Ejemplo 3.2.1 Consideremos el siguiente problema, escrito en la forma canónica:

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 & \\ & x_1 & -x_2 & +5x_3 & -x_4 & = 2 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = 4 \\ & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Elijamos $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

donde:

x_B : variables básicas o en la base (x_1, x_2 en este caso),

x_N : variables no-básicas o fuera de la base (x_3, x_4 en este caso).

Se puede despejar x_1, x_2 en función de x_3, x_4 y reemplazar en la función objetivo. Entonces, el problema se escribe:

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 & \\ & x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = 6 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = 4 \\ & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Como $c_N^T - \pi^T N = (3, 1) \geq 0$, la solución $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es óptima.

Criterio de optimalidad: en un problema de minimización escrito en la forma canónica, si las variables no básicas tienen asociado un vector de costos reducidos $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N \geq 0$, entonces la solución $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es óptima.

CASO 2: criterio de no acotamiento

Ejemplo 3.2.2 *Consideremos el siguiente ejemplo:*

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & -3x_3 & +x_4 & \\ & x_1 & -x_2 & +5x_3 & -x_4 & = 2 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = 4 \\ & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Habitualmente, los datos se ordenan en un cuadro:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^T & -\pi^T b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento del CASO 1, encontramos la siguiente tabla:

$\downarrow$				
x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	-3	1	$0 = -\pi^T b$
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4

Tal como en el ejemplo anterior, $x = (6 \ 4 \ 0 \ 0)^T$ es una solución factible; pero no es óptima, pues $\bar{c}_3 = -3 < 0$.

¿Conviene hacer crecer una variable no básica a un valor positivo? Es claro que sí; conviene que la variable x_3 tome un valor positivo.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_4 + 6 + 3x_3 \\ x_2 &= -4x_4 + 4 + 8x_3 \end{aligned}$$

Tomando $x_4 = 0$ (fuera de la base), x_3 puede crecer indefinidamente, disminuyendo el valor de la función objetivo, sin violar las restricciones, dado que las variables x_1 y x_2 se mantienen positivas. Este problema es no acotado.

Criterio de no acotamiento: si un costo reducido es negativo y los elementos en la columna correspondiente son negativos o nulos, entonces el problema es no acotado. Si la columna es enteramente nula (incluyendo el costo reducido), la variable es irrelevante.

CASO 3: criterio de mejoramiento de la solución en curso

Ejemplo 3.2.3 *Veamos ahora el ejemplo:*

$$\begin{array}{rcllcl} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & -x_4 & \\ & x_1 & -x_2 & +5x_3 & -x_4 & = 2 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = 4 \\ & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Escribamos la tabla:

				$\downarrow$	
	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	3	-1	0
	1	0	-3	3	6
	0	1	-8	4	4

La variable x_4 es no básica y su costo reducido es negativo, luego conviene hacerla entrar a la base. Si hay más de una variable con costo reducido negativo, se elige cualquiera que cumpla esa condición, aunque en general se usa elegir aquella de costo reducido menor.

¿Hasta qué valor puede crecer x_4 ? Veamos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -3x_4 + 6 \\ x_2 & = & -4x_4 + 4 \\ x_3 & = & 0 \quad (\text{fuera de la base}) \end{array}$$

Como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, entonces se lleva x_4 al valor $x_4 = \min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i4}} / \bar{a}_{i4} > 0\} = \min\{\frac{6}{3}, \frac{4}{4}\} = 1$.

x_1	x_2	x_3	$\downarrow s$ x_4	$-z$	
0	0	3	-1	0	
1	0	-3	3	6	
0	1	-8	4	4	$\rightarrow r$

Criterio de pivoteo (mejorar solución en curso): se hace entrar a la base alguna (cualquiera) variable no básica cuyo costo reducido sea negativo. Sea x_s la elegida. Para decidir cuál es la variable que entra en su reemplazo, se busca la fila r tal que

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\right\}$$

y se pivotea sobre el coeficiente en la posición (r, s) .

Algoritmo Simplex (Fase II)

Consideremos el siguiente cuadro factible, es decir, suponemos que $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, que la matriz A contiene una identidad, correspondiente a las columnas básicas, y que los costos reducidos de las variables básicas son nulos.

$\bar{c}_1$	$\dots$	$\bar{c}_n$	$-\bar{z}$
$\bar{a}_{11}$		$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$		$\vdots$	
$\bar{a}_{m1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

- (1) Si $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$, entonces la solución en curso es óptima. Las variables básicas son iguales a $\bar{b}_i$ y las no básicas son nulas.
- (2) Si $\bar{c}_j < 0$ para algún j , la elegimos para entrar a la base. Usaremos el criterio descrito anteriormente de elegir la variable cuyo costo reducido es menor. Supongamos que dicha variable es la s .
- (3) Si $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$, el problema es no acotado.
- (4) Si $\bar{a}_{is} > 0$ para algún i , se determina r tal que $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\right\}$ y se pivotea en $\bar{a}_{rs}$, para después volver a (1). Los coeficientes son modificados según:

$$\blacksquare \quad \bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is}\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \quad \text{para } i \neq r$$

- $\bar{a}_{rj} \leftarrow \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$
- $\bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$ para $i \neq r$
- $\bar{b}_r \leftarrow \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
- $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$
- $-\bar{z} \leftarrow -\bar{z} - \frac{\bar{c}_s\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$

Observación 3.2.1 *Notar que esto corresponde precisamente al pivoteo de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*

Ejemplo 3.2.4 *Consideremos*

$$\begin{array}{rcll} \text{mín} & -x_1 & -3x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 & & \geq 0 \end{array}$$

El problema, escrito en la forma canónica, queda:

$$\begin{array}{rcllcl} \text{mín} & -x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \\ & & & x_i & \geq 0 & i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Escribamos la tabla:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} \downarrow s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & \\ -3 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & \rightarrow r \end{array} & \rightsquigarrow (pivoteando) & \begin{array}{ccccc|c} \downarrow s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 6 & \\ \hline \boxed{4} & 0 & 1 & -1 & 1 & \rightarrow r \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \\ \\ \rightsquigarrow & \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z \\ 0 & 0 & 5/2 & 1/2 & 17/2 \\ \hline 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 11/4 \end{array} \end{array}$$

De este cuadro final identificamos $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & & \end{pmatrix}^T$ como la solución óptima, luego el valor óptimo es $z^* = -17/2$

Definición 3.2.4 Si una o más variables básicas son nulas, entonces la solución se dice **degenerada**. En caso contrario, la llamaremos **no-degenerada**.

Observación 3.2.2 Cuando la solución x de un PL es degenerada, existe más de una base asociada a ese vértice. En efecto, si $x \in \mathbb{R}^n$ tiene $p < m$ componentes positivas, donde m es el número de restricciones del problema, entonces podrían haber $\binom{n-p}{m-p}$ soluciones básicas factibles diferentes correspondientes a x . El punto x es el mismo, pero los conjuntos de variables etiquetadas básicas y no básicas son diferentes.

3.2.2. Fase I del algoritmo Simplex: obtener una solución inicial básica factible

Hasta ahora, sabemos resolver un PL dada una solución básica inicial. Cuando se trata de un problema de inecuaciones de tipo $\leq$ y el lado derecho es positivo o nulo, entonces la base de partida es trivial: está dada por las variables de holgura. La Fase I del Simplex consiste en encontrar una base factible cuando identificarla no es trivial.

Sabemos que el problema

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

se puede resolver mediante el algoritmo Simplex, recorriendo puntos extremos de la forma

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

que se llaman soluciones básicas factibles.

El problema es conocer una solución básica factible para comenzar el algoritmo. Este problema (que corresponde a investigar la factibilidad de (PL)) puede plantearse mediante el siguiente problema auxiliar:

$$(P_a) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_i x_{ai} \\ & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que $x \in \mathbb{R}^n$ y $x_a \in \mathbb{R}^m$. Bajo el supuesto razonable $b \geq 0$, una solución básica factible evidente para este problema es $x = 0$ y $x_a = b$, luego podemos usar la Fase II del algoritmo simplex para resolverlo.

El problema (P_a) se resuelve considerando $B = I$ (x_a en la base), $N = A$, $c_B = \mathbf{1}^T$ y $c_N = 0^T$. Así, para este problema el cuadro inicial es:

$$\begin{array}{c|c|c} \bar{c}_N^T & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array} \iff \begin{array}{c|c|c} c_N^T - c_B^T A & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array} \iff \begin{array}{c|c|c} -\mathbf{1}^T A & 0 & -\mathbf{1}^T b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector que tiene todas sus coordenadas iguales a 1, de manera que $\mathbf{1}^T b = b_1 + \dots + b_m$. Las variables x_{ai} son llamadas *variables artificiales* y el propósito del problema (P_a) es llevarlas a tomar valores nulos. Esto es posible, siempre que el problema original tenga una solución factible. En tal caso, el método Simplex terminará con una solución básica factible, donde $x_{ai} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Si en el óptimo de (P_a) se tiene algún $x_{ai} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$, entonces la solución en curso es solución factible de (P) . La solución de (P_a) satisface

$$[A \quad I] \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} = b,$$

con $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \geq 0$, luego $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix}$ es solución de (P_a) si y sólo si x es solución de (P) .

Si en el óptimo de (P_a) se tiene algún $x_{ai} > 0$, entonces el poliedro es vacío, es decir, (P) es infactible.

Ejemplo 3.2.5 Consideremos

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Escribamos el problema en su forma canónica:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & - \text{mín} \quad x_1 - 2x_2 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\
 & x_1 + x_4 = 4 \\
 & x_1 - x_2 = 0 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

Luego, agregando las variables artificiales x_5, x_6, x_7 (son tres, dado el número de restricciones del problema (P)), tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \quad x_5 + x_6 + x_7 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\
 & x_1 + x_4 + x_6 = 4 \\
 & x_1 - x_2 + x_7 = 0 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7
 \end{aligned}$$

Ya tenemos planteado el problema que necesitamos resolver. Escribamos la tabla y apliquemos el método Simplex¹:

$$\begin{array}{c|c}
 \downarrow \\
 \hline
 -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\
 \hline
 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \quad \leftarrow
 \end{array} \quad x^1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0)^T$$

Primera iteración:

$$\begin{array}{c|c}
 \downarrow \\
 \hline
 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\
 \hline
 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \quad \leftarrow \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \quad x^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0)^T$$

Segunda iteración:

$$\begin{array}{c|c}
 \downarrow \\
 \hline
 0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -7/2 \\
 \hline
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \quad \leftarrow \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2
 \end{array} \quad x^3 = \left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{7}{2} \ 0 \right)^T$$

¹las negrillas señalan las variables en la base para cada iteración.

Tercera iteración:

$$\begin{array}{cccc|cccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2
 \end{array} \quad x^4 = \left(\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^T$$

En la última iteración todas las variables artificiales salen de la base, los costos reducidos asociados toman todos el valor 1 y $z = 0$.

Ya tenemos una solución básica factible. Ahora eliminamos las variables artificiales y recalculamos los costos reducidos y el valor objetivo para esta solución:

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2
 \end{array}$$

El vector de costos está dado por $c^T = (1 \ -2 \ 0 \ 0)^T$, por lo tanto:

$$c_B^T = (c_2 \ c_4 \ c_1)^T = (-2 \ 0 \ 1)^T, \quad c_N^T = (c_3) = (0)$$

El orden en que se escribe el costo para las variables básicas depende del vector en la base canónica que las mismas tienen asociado.

Reconozcamos las matrices B y N en el problema original (P):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los costos reducidos serán:

$$\bar{c}_B^T = (0 \ 0 \ 0),$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - (-2 \ 0 \ 1) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}$$

$\left(-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)^T$ columna no básica del cuadro

En tanto que:

$$-\pi^T b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

Con esto el cuadro queda:

$$\begin{array}{cccc|c} & & \downarrow & & \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \rightarrow \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Iterando una vez según la Fase II algoritmo Simplex, obtenemos:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

con lo cual $x^T = (4 \quad 4 \quad 7 \quad 0)$ es solución óptima para el problema, y el valor de la función objetivo es $-(-\pi^T b) = 4$ (recordemos que hicimos el cambio $\max z = -\min\{-z\}$).

3.3. Programación Lineal Entera (ramificación y acotamiento)

En esta sección presentamos una forma de resolver el problema de Programación Lineal con la restricción adicional de integridad de algunas de las variables. Un caso particular muy importante de esto es aquel en que algunas variables pueden tomar solamente los valores 0 ó 1 (variables binarias o de decisión). Suponiendo que los costos son números enteros, introduciremos el método a través de un ejemplo simple; consideremos

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\ & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\ & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{N} \end{array}$$

El método funciona de la siguiente manera: se resuelve primero el problema relajado siguiente:

$$\begin{array}{rcll}
 (P_0) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

La relajación corresponde a cambiar el conjunto $\mathbb{N}$ por $\mathbb{R}^+$, pero en el caso de variables 0-1, la relajación correspondería a imponer restricciones del tipo $x_i \in [0, 1]$.

La solución de (P_0) es $(x_1, x_2) = (\frac{9}{4}, \frac{15}{4})$, con valor $z_0^* = 452,25$. Si denotamos z^* al desconocido valor óptimo de (P) , entonces es claro que $z_0^* \leq z^*$, pues la región factible de (P_0) contiene a la región factible de (P) .

Dado que los costos son enteros, se puede deducir una cota de (P) : $z^* \geq 453$.

Acotamos una de las variables (x_1) , que toma valor no entero, en la forma $x_1 \leq 2$ o bien $x_1 \geq 3$. Eso divide la región factible en dos subregiones que conforman una partición de la región factible de (P) . Se resuelve por separado los dos subproblemas así generados:

$$\begin{array}{rcll}
 (P_{11}) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & & x_1 & \leq 2 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcll}
 (P_{12}) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & & x_1 & \geq 3 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

sabiendo que la solución de (P) se encuentra en una de las dos subregiones factibles de estos problemas (P_{11}) y (P_{12}) . Veamos entonces las soluciones de estos problemas:

- para (P_{11}) : $(x_1, x_2) = (2, 4)$, $z_{11}^* = 462$;
- para (P_{12}) : $(x_1, x_2) = (3, \frac{10}{3})$, $z_{12}^* = 453$.

Dado que (P_{11}) tiene solución entera, representa una solución factible para el problema original (P) . Entonces ese problema ya no dará origen a subproblemas, pues no hay variables para subdividir, y establece una cota para la función objetivo: $z^* \leq 462$.

Análogamente, el problema (P_{12}) tiene una solución no entera, de modo que su valor óptimo

es una cota inferior del valor óptimo del problema (P) original, es decir, $z^* \geq 453$.

En esta etapa corresponde entonces subdividir según el subproblema (P_{12}) , en la forma: $x_2 \leq 3$ o bien $x_2 \geq 4$. La variable x_2 , en este caso, es la única que permite ramificar, pero en general puede haber muchas y en ese caso se elige cualquiera. Tenemos entonces dos subproblemas a partir de (P_{12}) :

$$\begin{array}{llll}
 (P_{21}) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & & x_1 & \geq 3 \\
 & & & x_2 \leq 3 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{llll}
 (P_{22}) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & & x_1 & \geq 3 \\
 & & & x_2 \geq 4 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Las soluciones respectivas son:

- para (P_{21}) : $(x_1, x_2) = (\frac{18}{5}, 3)$, $z_{21}^* = 453,6$;
- para (P_{22}) : $(x_1, x_2) = (3, 4)$, $z_{22}^* = 513$.

Esto entrega el nuevo intervalo: $454 \leq z^* \leq 462$.

Si denotamos (P_k) a un subproblema cualquiera de la ramificación, entonces se detiene el proceso de búsqueda en la rama correspondiente cada vez que ocurre una de las 3 situaciones siguientes:

- El subproblema (P_k) es infactible. Cualquier ramificación (que corresponde a agregar restricciones) que se haga de ahí en adelante generará subproblemas infactibles.
- El subproblema (P_k) entrega una solución entera. Dado que la región factible de (P_k) está contenida en la región factible del problema (P) , entonces la solución del subproblema es factible para (P) y por lo tanto provee una cota superior del valor óptimo z^* buscado.
- El subproblema (P_k) tiene solución no entera y su valor óptimo es mayor que la menor cota superior de z^* establecida por los subproblemas precedentes que han entregado soluciones enteras.

Para la aplicación de estas reglas hay que tener en cuenta que:

- Cada vez que se encuentra un subproblema con solución entera, se genera una cota superior de z^* .
- Cada vez que se encuentra un subproblema con solución no entera, se puede ramificar y se dispone de una nueva cota inferior de z^* .

Estos dos hechos permiten establecer una sucesión decreciente de intervalos que contienen el valor z^* y que pueden ser usados como criterio de detención, cuando no se busca necesariamente la solución óptima de (P) , sino que solamente una buena aproximación de ella.

En nuestro ejemplo, la rama a partir de (P_{22}) debe detenerse por dos razones: tiene solución entera y también el valor $z_{22} = 513$ es mayor que la mejor cota $z^* \leq 462$.

Contrariamente, se puede ramificar de nuevo a partir del problema (P_{21}) , según la variable x_1 , que toma el valor $18/5$ en dicho problema. Siguiendo este proceso se llega finalmente a la solución del problema original:

$$\blacksquare (x_1^*, x_2^*) = (9, 0), z^* = 459,$$

que proviene de la resolución del subproblema:

$$\begin{array}{rcll} \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 6 \\ & 5x_1 & +9x_2 & \geq 45 \\ & x_1 & & \geq 3 \\ & & x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & & \geq 4 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & & \geq 6 \\ & & x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & & \geq 8 \\ & & x_2 & \leq 0 \\ & x_1, x_2 & & \geq 0 \end{array}$$

Este método, si bien es convergente, puede ser muy ineficiente del punto de vista del inmenso número de subproblemas que puede ser necesario resolver para llegar a la solución. En el ejemplo aquí presentado, de sólo dos variables, ha sido necesario "bajar" hasta el noveno nivel del árbol y resolver 17 subproblemas para encontrar la solución. Mucha investigación se ha llevado a cabo con el fin de mejorar la eficiencia de este método básico y actualmente se dispone de muy buenas estrategias de solución para problemas muy grandes (varios miles

o eventualmente millones de variables) de Programación Lineal Mixta (con variables enteras y continuas).

Como último comentario, se puede observar que si se hubiese aproximado la solución del primer problema relajado (P_0) al entero más cercano, se habría propuesto la solución aproximada

$$\blacksquare (x_1^*, x_2^*) = (2, 4), \quad z^* = 462,$$

que está bastante lejos de la solución exacta encontrada mediante el método. Ese es un peligro que se corre cuando se resuelve el problema relajado y luego se aproximan los valores de las variables al entero más cercano. Eventualmente este tipo de soluciones aproximadas puede ser infactible.

Capítulo 4

Dualidad en Programación Lineal y Aplicaciones

Comenzaremos el estudio de la dualidad en programación lineal con un ejemplo.

Ejemplo 4.0.1 *Una fábrica produce tres artículos en cantidades x_1, x_2, x_3 , los cuales utilizan dos materias primas en su elaboración, digamos a y b .*

El proceso de producción debe satisfacer lo siguiente:

1) *Para producir una unidad del artículo 1 se necesitan 2 unidades del recurso a y 5 del recurso b .*

Para producir una unidad del artículo 2 se necesitan 3 unidades del recurso a y 2 del recurso b .

Para producir una unidad del artículo 3 se necesita 1 unidad del recurso a y 1 del recurso b .

2) *El recurso a está disponible hasta 10 unidades y el recurso b hasta 20 unidades.*

El precio unitario de venta del producto 1 es \$4, el del producto 2 es \$1 y el del producto 3 es \$5.

El problema del fabricante será el de maximizar sus utilidades (sus ingresos por venta, en este ejemplo) sujeto a sus restricciones en la producción.

El problema se plantea entonces en la forma:

$$\begin{array}{rcll}
(P) \quad \text{máx} & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 \\
& 2x_1 & +3x_2 & +x_3 \leq 10 \\
& 5x_1 & +2x_2 & +x_3 \leq 20 \\
& & & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3
\end{array}$$

Tomemos una combinación lineal positiva de las restricciones, con multiplicadores y_1, y_2 :

$$y_1(2x_1 + 3x_2 + x_3) + y_2(5x_1 + 2x_2 + x_3) \leq 10y_1 + 20y_2$$

Esto que puede reescribirse de la forma:

$$x_1(2y_1 + 5y_2) + x_2(3y_1 + 2y_2) + x_3(y_1 + y_2) \leq 10y_1 + 20y_2$$

Si imponemos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl}
2y_1 & +5y_2 & \geq 4 \\
3y_1 & +2y_2 & \geq 1 \\
y_1 & +y_2 & \geq 5
\end{array} \tag{4.1}$$

entonces,

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10y_1 + 20y_2 = \omega,$$

es decir, ω acota superiormente a la función objetivo de (P) cuando se satisface (4.1). Luego, es razonable preguntarse si el mínimo de la función ω es igual máximo de la función z . Es decir, planteamos el siguiente problema asociado a los multiplicadores y_i :

$$\begin{array}{rcll}
(D) \quad \text{mín} & 10y_1 & +20y_2 \\
& 2y_1 & +5y_2 \geq 4 \\
& 3y_1 & +2y_2 \geq 1 \\
& y_1 & +y_2 \geq 5 \\
& & & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}$$

y quisiéramos averiguar si el valor **máximo de z** (óptimo de (P)) coincide con el valor **mínimo de ω** (óptimo de (D)).

Notemos que hemos partido de un problema de la forma

$$(P) \quad \text{máx} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

y hemos llegado a otro de la forma

$$(D) \quad \min \begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Más aún, se observa que la solución de (P) es $x^* = (0, 0, 10)^T$, con $z^* = 50$ y la solución de (D) es $y^* = (5, 0)^T$ con $w^* = 50$. La igualdad $z^* = w^*$ es una propiedad que precisaremos en la sección siguiente.

4.1. Definición de dualidad y principales propiedades

Lo expuesto en la sección precedente motiva la siguiente definición de dualidad.

Definición 4.1.1 *Sea*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

*un problema que llamaremos **problema primal**. El problema:*

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

*se llamará **problema dual de (P)**.*

Teorema 4.1.1 *La dualidad es simétrica, es decir, el dual de (D) es (P) .*

Demostración. Para demostrar este teorema tomaremos el problema:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

y lo transformaremos para escribirlo en forma "primal", es decir, como un problema de maximización, con restricciones de tipo $\leq$, y positividad en las variables. Esto es, (D) es equivalente a:

$$(\tilde{D}) \quad \begin{array}{ll} - \text{máx} & (-b)^T y \\ & (-A)^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

El problema dual asociado a $(\tilde{D})$, según la definición anterior, es:

$$- \text{mín} \quad \begin{array}{ll} (-c)^T x \\ (-A)x \geq -b \\ x \geq 0 \end{array}$$

que a su vez es equivalente a:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que es entonces el dual de (D) . ■

Observación 4.1.1 *El teorema precedente muestra que la denominaciones de primal y dual son arbitrarias, en el sentido que ambos problemas son duales mutuos. Así, como se verá más adelante, cualquier problema puede ser denominado primal y su dual, que siempre existe, no es único, en el sentido que un mismo problema puede escribirse en más de una forma.*

Una noción limpia de dualidad requiere que las variables de un problema pertenezcan a un espacio cuya dimensión sea igual al número de restricciones del dual (por restricciones entendemos las ecuaciones o inecuaciones lineales, sin incluir las condiciones de signo de las variables).

El teorema siguiente muestra que la función objetivo del problema dual acota a la del primal y viceversa.

Teorema 4.1.2 (Dualidad Débil) *Sea*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

un problema primal y

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

su dual. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{D}$ denotan respectivamente los conjuntos factibles de (P) y (D), entonces para todo $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{D}$, se cumple

$$c^T x \leq b^T y.$$

Demostración. Si multiplicamos por x^T (≥ 0) la inecuación $A^T y \geq c$, se obtiene que $x^T A^T y \geq x^T c$, de donde $c^T x \leq (Ax)^T y \leq b^T y$, pues $y \geq 0$. ■

Corolario 4.1.1 *Sean $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ puntos factibles para (P) y (D). Si $c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$, entonces $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ son óptimos respectivos.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema de Dualidad Débil:

$b^T \tilde{y} = c^T \tilde{x} \leq b^T y \quad \forall y$ punto factible de (D), es decir, $\tilde{y}$ es óptimo de (D).

$c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y} \geq c^T x \quad \forall x$ punto factible de (P), es decir, $\tilde{x}$ es óptimo de (P). ■

Ejercicio 4.1.1 *El dual del problema de Programación Lineal estándar*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

es el problema

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array}$$

Hint. Para resolver este ejercicio, se sugiere desdoblar la restricción de igualdad en el problema (P) , escribirla en forma $\geq$ y luego aplicar la definición de dualidad.

Teorema 4.1.3 (Dualidad Fuerte) *Consideremos la pareja primal-dual*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array}$$

Entonces, para $\tilde{z}$, valor mínimo de (P) y $\tilde{\omega}$, valor máximo de (D) , se tiene:

- a) Si $\tilde{z}$ es finito, entonces $\tilde{\omega}$ también lo es y se cumple $\tilde{z} = \tilde{\omega}$
- b) Si $\tilde{\omega}$ es finito, entonces $\tilde{z}$ también lo es y se cumple $\tilde{z} = \tilde{\omega}$
- c) Si (P) es no acotado, entonces (D) es infactible
- d) Si (D) es no acotado, entonces (P) es infactible

Demostración.

- a) Dado que $\tilde{z}$ es finito, existe un $\tilde{x}$ (punto extremo o solución básica factible), que es solución de (P) . Entonces existe también B , submatriz de $A = [B, N]$, tal que se puede escribir $\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix}$. Además, en el óptimo los costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir para $\pi = B^{-T}c_B$ se tiene

$$c_N^T - \pi^T N \geq 0$$

lo que implica

$$N^T \pi \leq c_N.$$

Probaremos que π es solución básica factible óptima de (D) , con lo cual, $\tilde{\omega} = b^T \pi$ será finito.

En efecto, π es factible para (D) , pues

$$A^T \pi = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} B^{-T} c_B = \begin{pmatrix} c_B \\ N^T \pi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = c$$

y π es óptimo para (D) , pues

$$\tilde{\omega} = b^T \pi = b^T B^{-T} c_B = (c_B^T \quad c_N^T) \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = c^T \tilde{x} = \tilde{z}$$

por lo tanto, por el Teorema de Dualidad Débil, π es óptimo.

b) Análogo.

c) Sabemos que (P) es no acotado. Supongamos entonces que existe $\bar{y}$ tal que $A^T \bar{y} \leq c$ (esto es la factibilidad del dual).

Por el Teorema de Dualidad Débil, se sabe que $b^T \bar{y} \leq c^T x$ para todo x primal-factible. Esto dice que (P) es acotado, lo que establece una contradicción.

d) Análogo. ■

Resumamos los resultados anteriores en el siguiente cuadro:

		Primal		
Dual		$\tilde{z}$ finito	(P) no acotado	(P) infactible
	$\tilde{\omega}$ finito	Sí	No	No
	(D) no acotado	No	No	Sí
	(D) infactible	No	Sí	Sí/No

Ejercicio 4.1.2 Indique un ejemplo de un par primal-dual, en que ambos problemas sean infactibles.

Teorema 4.1.4 (Holgura Complementaria) Consideremos la pareja primal-dual

$$\begin{array}{ll} (P) \text{ mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D) \text{ máx} & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array}$$

Sean x^* e y^* , óptimos respectivos de (P) y (D) , y $s^* = c - A^T y^*$. Entonces $x^{*T} s^* = 0$.

Inversamente, si x^* e y^* son factibles para los problemas primal y dual, respectivamente, y si $x^{*T} s^* = 0$, entonces las soluciones x^* e y^* son óptimas respectivas para (P) y (D) .

Demostración: Por el Teorema de Dualidad Fuerte, si x^* e y^* son óptimos respectivos de (P) y (D) , entonces $c^T x^* = b^T y^*$, de donde se tiene

$$c^T x^* = b^T y^* = x^{*T} A^T y^* = x^{*T} (c - s^*) = x^{*T} c - x^{*T} s^*,$$

lo que implica $x^{*T} s^* = 0$.

Inversamente, $x^{*T} s^* = 0$ implica que $x^{*T} c - x^{*T} A^T y^* = 0$, es decir, $c^T x^* - b^T y^* = 0$, que es la condición de optimalidad de x^* e y^* . ■

Observación 4.1.2 *La condición de holgura complementaria $x^{*T} s^* = 0$ se puede expresar, en forma equivalente, por $x_i^* s_i^* = 0$ $i = 1, \dots, n$.*

Observación 4.1.3 *El sistema que se deduce de la aplicación del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker:*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T y + u &= c \\ u^T x &= 0 \\ x, u &\geq 0 \end{aligned}$$

corresponde también a una aplicación del Teorema de Holgura Complementaria. En efecto, la primera ecuación establece la factibilidad de la solución primal x ; la segunda, establece la factibilidad de la solución dual y , puesto que la variable de holgura u es no negativa; finalmente, la tercera ecuación caracteriza la optimalidad, de acuerdo al Teorema de Holgura Complementaria.

4.2. Interpretación económica de la dualidad

El dual de un problema lineal surge naturalmente de las condiciones de optimalidad del problema primal (P) (condiciones de Karush-Kuhn-Tucker). Mostraremos que si el problema primal tiene una interpretación económica, entonces también el dual y los valores óptimos de las variables duales pueden ser interpretados como precios.

Como ya vimos $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución básica factible para un programa lineal en la forma estándar. Bajo el supuesto que $x_B > 0$, una pequeña perturbación

del lado derecho Δb no provoca un cambio en la base óptima. Luego, cuando b es reemplazado por $b + \Delta b$, la nueva solución óptima se transforma en $x' = \begin{pmatrix} x_B' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \\ 0 \end{pmatrix}$ y el valor óptimo de la función objetivo se perturba en

$$\Delta z = c_B^T B^{-1} \Delta b = \pi^{*T} \Delta b$$

donde $\pi^* = B^{-T} c_B$ es el multiplicador del problema primal en el óptimo. Como probamos en el teorema de dualidad fuerte, π^* es la solución óptima del problema dual. Claramente, π_i^* puede verse como el precio marginal del i -ésimo recurso (es decir, el lado derecho b_i), ya que da el cambio en el valor objetivo óptimo por unidad de incremento en ese recurso. Esta interpretación puede ser muy útil, pues indica la cantidad máxima que uno está dispuesto a pagar por aumentar la cantidad del i -ésimo recurso. Note que las condiciones de holgura complementaria implican que el precio marginal para un recurso es cero si tal recurso no fue completamente utilizado en el óptimo. Otros nombres dados a este precio en el óptimo son *precio sombra* y *precio de equilibrio*.

Veamos ahora otra interpretación económica posible. Supongamos que estamos bajo competencia perfecta y un productor resuelve:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

es decir, desea maximizar las utilidades dadas por el vector de precios c , sujeto a las restricciones de capacidad de su firma. En el óptimo las restricciones no necesariamente se cumplen con igualdad, es decir podrían sobrar ciertas materias primas que se pueden vender en el mercado en un cierto precio, dado por el vector $\lambda \geq 0$. Entonces, lo que este productor resuelve es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Así, las utilidades de la firma están dadas por:

$$\varphi(\lambda) = \text{máx}\{\lambda^T b + (c - A^T \lambda)^T x, \ x \geq 0\} = \lambda^T b + \text{máx}\{(c - A^T \lambda)^T x, \ x \geq 0\}$$

Las posibles soluciones de este problema son dos:

- Si el vector $(c - A^T\lambda)$ tiene todas sus componentes negativas, dado que el vector x es positivo, se tiene que el máximo es cero, y $\varphi(\lambda) = \lambda^T b$.
- Si el vector $(c - A^T\lambda)$ tiene alguna coordenada positiva, entonces, por el mismo argumento, el subproblema de maximización es no acotado, luego $\varphi(\lambda) = \infty$.

Entonces se tiene

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} b^T \lambda & \text{si } (c - A^T \lambda) \leq 0, \lambda \geq 0 \\ \infty & \text{si no} \end{cases}$$

que es la utilidad del productor, en función de λ . El mercado, "que es cruel", asigna al productor el mínimo de utilidades, a través de la fijación de precios. Como conoce la situación de costos e infraestructura (suponiendo información completa), entonces resuelve:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T \lambda \\ & A^T \lambda \geq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

que es el problema dual asociado al problema (P) del productor.

4.3. Dual de cualquier problema lineal

La tabla siguiente permite deducir fácilmente el dual de cualquier problema de Programación Lineal.

Prob. de minimización	Prob. de maximización
tipo de restricción	variable asociada
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	irrestringida
tipo de variable	restricción asociada
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
irrestringida	$=$

4.4. Algoritmo Simplex-dual

Supongamos que tenemos el siguiente cuadro *dual factible*, es decir, los costos reducidos son positivos, pero el lado derecho $\bar{b}$ no es necesariamente positivo (la solución básica en curso

no es positiva, luego no es factible). Entonces, consideramos:

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ (condición de dual-factibilidad)
- $\bar{N} = B^{-1} N, \quad \bar{b} = B^{-1} b, \quad \bar{A} = [I, \bar{N}]$

0	$\bar{c}_N^T$	$-\bar{z}$
I	$\bar{N}$	$\bar{b}$

Los siguientes pasos resumen el Algoritmo Simplex-dual:

- (1) Si $\bar{b} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$, entonces la solución en curso es óptima. Si no, ir a (2).
- (2) Elegir cualquier r tal que $\bar{b}_r < 0$.
 - Si $\bar{a}_{rj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ entonces el problema *dual es no acotado*, es decir, el problema primal es infactible.
 - Si algún $\bar{a}_{rj} < 0$, pasar a (3).
- (3) Elegir la columna s tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

e ir a (4).

- (4) Pivotar en la posición (r, s) y volver a (1).

4.5. Introducción al análisis post-optimal

Muchas veces, una vez resuelto el problema lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se desea examinar el comportamiento de la solución si se modifica alguno de sus parámetros. Algunos de estos cambios pueden ser:

- Variación en los coeficientes de la función objetivo.
- Variación en el vector de recursos.
- Introducción de una nueva variable.
- Introducción de una nueva restricción.

Puede suceder que nuestro problema sea muy complejo y no se desee resolver completamente de nuevo para analizar estos cambios, por ejemplo por problemas de tiempo de cómputo. Las siguientes subsecciones examinan estos casos, sobre la base de ejemplos simples. El estudio del comportamiento de la solución de un problema lineal, como función de ciertos parámetros del problema, también se conoce como *análisis de sensibilidad*.

4.5.1. Variación en los coeficientes de la función objetivo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 \\
 & x_1 & & \leq 400 \\
 & 2x_1 & +x_2 & +x_3 \leq 1000 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 \leq 1600 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Una solución inicial es $x_0 = (0, 0, 0)^T$ (notar que es un punto extremo del poliedro). El cuadro Simplex inicial es:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 -20 & -16 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\
 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1600
 \end{array}$$

Luego de pivotear, se llega al siguiente cuadro final:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400
 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} \quad x_{holg} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base está compuesta por $[x_3, x_2, x_4]$ y el valor óptimo es -14400. ¿Qué sucede si nos informan que el coeficiente c_1 vale -30 en lugar de -20?

Examinemos los costos reducidos (los demás elementos del cuadro, es decir, $B^{-1}N$, $B^{-1}b$, y $c_B^T B^{-1}b$ no sufren alteraciones, dado que c_1 no participa en ellos). Tenemos que $\bar{c}_5 = 8$ y

$$\bar{c}_6 = 4 \text{ no se modifican, y } \bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1}A_1 = -30 - \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6.$$

Por esto, el cuadro final cambia a uno que no satisface optimalidad:

$$\begin{array}{cccccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}$$

Por lo tanto se puede pivotar para mejorar la solución en curso, haciendo entrar x_1 a la base:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 & 14 & 1 & 15600 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 200 \end{array}$$

y la nueva solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{holg} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base cambió a $[x_1, x_2, x_4]$ y el valor mínimo cayó a -15600.

¿Qué sucede si $c_1 = -20$ se modifica a $c_1 = -20 + \theta$? Retomemos el asunto:

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1}a_1 = (-20 + \theta) - \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + \theta,$$

que es positivo cuando $\theta \geq -4$. Es decir, el rango para el coeficiente c_1 con el que la base óptima $[x_3, x_2, x_4]$ no cambie es $c_1 \geq -24$.

Veamos otro caso. Supongamos ahora que el coeficiente perturbado es $c_2 = -16$ y pasa a ser $-16 + \gamma$. El vector de costos queda:

$$c = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 + \gamma \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que las tres primeras componentes de este vector corresponden a los costos estructurales y las últimas tres corresponden a las variables de holgura, y por lo tanto son cero. Examinemos los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^T &= c_N^T - c_b^T B^{-1} N \\ &= (-20 \ 0 \ 0) - (-12 \ -16 + \gamma \ 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (4 \ 8 + \gamma \ 4 - \gamma) \end{aligned}$$

Estos costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir preservan la optimalidad, cuando:

$$-8 \leq \gamma \leq 4$$

o sea, la base $[x_2, x_3, x_4]$ no cambia si:

$$-24 \leq c_2 \leq -12$$

En general, si el vector c cambia a $\tilde{c}$ se debe evaluar $\tilde{c}_N^T = \tilde{c}_N^T - \tilde{c}_B^T B^{-1} N$ y decidir:

- si $\tilde{c}_N^T \geq 0$, la base óptima no cambia y sólo hay que reevaluar $\tilde{c}_B^T B^{-1} b = z^*$.
- si $\tilde{c}_N^T \not\geq 0$, se itera con algoritmo Simplex.

4.5.2. Variación en el vector de recursos (o lado derecho)

Tomemos el mismo ejemplo y supongamos que el vector b cambia a $\tilde{b}$. La base óptima para b es $[x_3, x_2, x_4]$ entonces se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz B^{-1} es parte del cuadro final. Se tiene que:

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$, la solución en curso *aún es óptima*.
- Si $B^{-1}\tilde{b} \not\geq 0$, la solución no es factible (primal), pero los costos reducidos no han sufrido cambios, luego el cuadro final presenta una solución primal-infactible y dual-factible. Entonces se debe iterar con el algoritmo Simplex-dual.

Veamoslo con un ejemplo: supongamos que $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} \geq 0$$

Así, la base óptima no cambia, pero:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Además, } z^* = c_B^T B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = -14400.$$

Una pregunta interesante es: ¿cuál es el rango para $\tilde{b}$, de modo que la base óptima no se modifique? Para ello, basta calcular:

$$B^{-1}\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{b}_2 - \tilde{b}_3 \\ -\tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

De aquí se deduce que para que se cumpla la condición de optimalidad se debe tener:

$$\tilde{b}_1 \geq 0 \quad \tilde{b}_2 \leq \tilde{b}_3 \leq 2\tilde{b}_2$$

Notemos que en este ejemplo los datos originales satisfacen estas condiciones.

4.5.3. Introducción de una nueva actividad (o variable)

Supongamos que, en el ejemplo, se introduce la variable x_4 con costo $c_4 = -10$ y coeficientes

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la matriz, es decir, el problema se transforma en:

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & -10x_4 & \\ & x_1 & & & +x_4 & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 1600 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

y el cuadro inicial es (incluyendo las variables de holgura):

-20	-16	-12	-10	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	400
2	1	1	0	0	1	0	1000
2	2	1	1	0	0	1	1600

Si se realiza la misma secuencia de iteraciones para alcanzar la base óptima del problema original, el cuadro final es:

4	0	0	-6	0	8	4	14400
2	0	1	-1	0	2	-1	400
0	1	0	1	0	-1	1	600
1	0	0	1	1	0	0	400

Aquí, conviene observar que: $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4$, es decir,

$$\bar{c}_4 = -10 - (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Además:

$$B^{-1}A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, basta agregar la columna correspondiente a la nueva variable en el cuadro final original. Esta columna es:

$$\begin{pmatrix} c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \\ B^{-1} A_4 \end{pmatrix}$$

en que c_4 es el costo de la variable nueva y A_4 es el vector columna de dicha variable, en la matriz de restricciones.

En este caso, la nueva variable tiene costo reducido $-6 < 0$, y por lo tanto puede entrar a la base. Así el cuadro queda:

10	0	0	0	6	8	4		16800
3	0	1	0	1	2	-1		800
-1	1	0	0	-1	-1	1		200
1	0	0	1	1	0	0		400

La nueva variable permite disminuir el costo total desde -14400 a -16800 siendo la solución final:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Observación 4.5.1 ¿Podría la nueva variable producir no acotamiento? La respuesta es sí. La condición para ello es que $B^{-1}A_4 \leq 0$.

En el ejemplo, nos interesa calcular para qué valores del nuevo costo c_4 la variable introducida es irrelevante en el óptimo (es decir, no pertenece a la base óptima). La condición para ello es que :

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \geq 0 \quad \text{lo que implica} \quad c_4 \geq c_B^T B^{-1} A_4 = -4$$

4.5.4. Introducción de una nueva restricción

Estamos tratando el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Cuyo cuadro óptimo, salvo reordenamiento, está dado por:

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Supongamos que se agrega la restricción:

$$d^T x \leq d_0$$

En que $d \in \mathbb{R}^n$ y $d_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, agregamos:

$$d^T x + x_{n+1} = d_0$$

Con x_{n+1} una variable de holgura. Así, el problema original se puede plantear como:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c_B^T x_B + c_N^T x_N + 0x_{n+1} \\ & Bx_B + Nx_N + 0x_{n+1} = b \\ & d_B^T x_B + d_N^T x_N + x_{n+1} = d_0 \\ & x_B, x_N, x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

en que $d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$. O bien, el nuevo problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (c^T \ 0) \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ & \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

Agreguemos x_{n+1} a la base, es decir propongamos:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^T & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo se modifica el cuadro final? Veamos término a término:

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - (c_B^T \ 0) \tilde{B}^{-1} \begin{bmatrix} N \\ d_N^t \end{bmatrix} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ (los costos reducidos no cambian)
- $\tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -d_B^T B^{-1}b + d_0 \end{pmatrix}$
- $(c_B^T \ 0) \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1}b.$

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	0	$-c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	0	$B^{-1} b$
0	$d_N^T - d_B^T B^{-1} N$	1	$d_0 - d_B^T B^{-1} b$

Luego,

- Si $d_0 - d_B^T B^{-1} b \geq 0$, la solución propuesta en los datos originales sigue siendo óptima, sólo que la holgura x_{n+1} entra a la base con valor $d_0 - d_B^T B^{-1} b$.
- Si $d_0 - d_B^T B^{-1} b < 0$, la solución propuesta *no es factible*, pues la holgura x_{n+1} toma un valor negativo. Iterar con algoritmo Simplex-dual, pivotando sobre la fila agregada. En este caso, si $d_N^T - d_B^T B^{-1} N \geq 0$, el problema (primal) es infactible, dado que el dual es no acotado.

Retomemos el problema del inicio:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 \\
 & x_1 & & \leq 400 \\
 & 2x_1 & +x_2 & +x_3 \leq 1000 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 \leq 1600 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Si se agrega la restricción: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$, es decir,

- $d_0 = 800$
- $d^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$

Entonces,

- $d_B^T = (1 \ 1 \ 0) \quad [x_3, x_2, x_4]$
- $d_N^T = (1 \ 0 \ 0) \quad [x_1, x_5, x_6]$
- $d_N^T - d_B^T B^{-1} N = (1 \ 0 \ 0) - (1 \ 1 \ 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1 \ -1 \ 0)$
- $d_0 - d_B^T B^{-1} b = 800 - (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} = -200$

El cuadro óptimo del problema original,

$$\begin{array}{cccccc|c}
 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400
 \end{array}$$

se transforma en (agregando una fila y una columna):

$$\begin{array}{cccccc|c}
 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & \mathbf{0} & 14400 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \mathbf{0} & 400 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & 600 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 400 \\
 -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -200
 \end{array}$$

Al pivotar con Simplex-dual, la última variable sale de la base (entra la primera) generando un nuevo cuadro óptimo y una nueva solución:

0	0	0	0	4	4	4		14000
0	0	1	0	0	-1	2		0
0	1	0	0	-1	1	0		600
0	0	0	1	-1	0	1		200
1	0	0	0	1	0	-1		200

de modo que $x^* = (200 \ 600 \ 0 \ 200 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ y $z^* = -14000$.

Esta técnica para recalcular soluciones óptimas cuando se ha agregado una restricción, puede ser muy útil en la resolución de problemas de Programación Lineal Entera mediante el método de Ramificación y Acotamiento, explicado anteriormente.

Capítulo 5

Modelos para flujos en redes

Esta área de la Optimización es muy importante ya que existen muchos problemas de estructura particular que se pueden expresar mediante la noción de grafo o red. Muchos de estos problemas ya estaban planteados y concitaban el interés de los matemáticos e ingenieros antes de la aparición formal de la Programación Lineal.

5.1. Motivación y descripción de problemas clásicos

En este capítulo introduciremos el problema de flujo de costo mínimo (*FCM*), a través de cuatro problemas específicos que son casos particulares de él:

- a) Problema de asignación
- b) Problema de transporte
- c) Problema de flujo máximo
- d) Problema del camino más corto

Definición 5.1.1 Un **grafo** es un par $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{N}$ es un conjunto finito y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. A los elementos en $\mathcal{N}$ se les llama **nodos** y a los pares ordenados en $\mathcal{A}$ se les llama **arcos**.

Notemos que los arcos son *dirigidos*, es decir, el par $(i, j) \in \mathcal{A}$ es distinguible del par $(j, i) \in \mathcal{A}$, que representa un arco en el sentido contrario. En el grafo de la figura la cantidad entre paréntesis (b) representa la oferta en cada nodo (si $b > 0$ el nodo **ofrece** la cantidad b ,

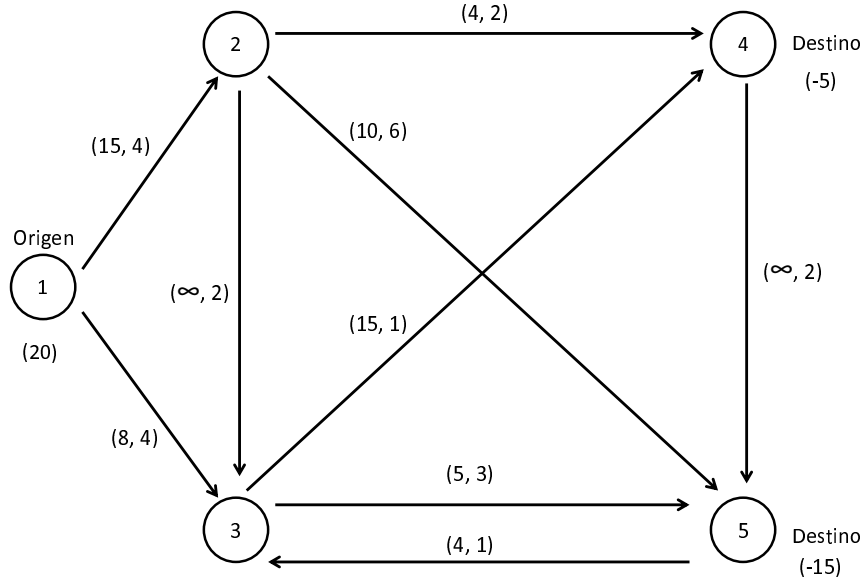


Figura 5.1: Ejemplo de un grafo o red.

si $b < 0$ el nodo **demanda** la cantidad b , si es cero entonces es un nodo de **trasbordo**). La notación (u_{ij}, c_{ij}) sobre cada arco, indica la capacidad o cota superior del arco u_{ij} y el costo unitario c_{ij} del flujo x_{ij} , que es la cantidad enviada desde i a j . En general, sobre los arcos se puede imponer cotas inferior y superior, del tipo $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$.

El problema general corresponde a encontrar un flujo factible, de costo mínimo. Entonces el problema es:

$$\begin{aligned}
 (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

La primera restricción dice que lo que entrega el nodo i es igual a su oferta más lo que recibe, dado que el término del lado izquierdo representa la **diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante al nodo**. La segunda restricción, dice que el flujo sobre un arco debe respetar entre las cotas del mismo (en muchos casos se usa $l_{ij} = 0$ y $u_{ij} = \infty$).

Notemos que cada arco aparece sólo en dos restricciones ya que un arco participa solamente en dos nodos: en uno como arco entrante y en otro como arco saliente. Cabe destacar que la matriz A resultante es de rango incompleto (igual a $n - 1$, en que n es la cardinalidad de $\mathcal{N}$). En efecto, la suma de las filas es cero, es decir son linealmente dependientes. Como haremos en lo que sigue el supuesto (esencial en todo este capítulo) que

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0,$$

es decir que la oferta iguala a la demanda, entonces el sistema de ecuaciones del problema (FCM) tiene una ecuación redundante. En todo caso, ese supuesto no hace perder generalidad al tratamiento de los problemas que veremos más adelante.

Normalmente, las variables estructurales del problema son consideradas enteras, de manera que el problema general de flujo de costo mínimo puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ & Ax = b \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \\ & x_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ciertamente, es posible levantar la restricción de integridad de las variables y el problema sigue teniendo sentido, pero en este texto nos remitimos al caso de variables enteras. Los datos del problema del ejemplo de la figura pueden entonces resumirse en la siguiente tabla:

nodo/costo	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	x_{53}	oferta
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	20
2	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	-1	-1	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-5
5	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	1	-15
capacidad	15	8	∞	4	10	15	5	∞	4	

Las filas 1 a 5 de este cuadro representan las restricciones de equilibrio y se observa que la matriz A tiene las filas linealmente dependientes (suman cero). De hecho, en cada columna hay solamente dos coeficientes no nulos, un 1 y un -1, dado que cada arco es emergente para un nodo e incidente para otro.

En lo que sigue del capítulo describiremos los 4 problemas antes mencionados, para luego entregar un método de resolución del problema de transporte y una forma de mejorar soluciones factibles del problema más general (*FCM*).

5.1.1. Problema de asignación

Supongamos que el gerente de algún gran supermercado, que consta de 50 cajas, desean saber cómo asignar 50 cajeras a estas cajas, de manera que el rendimiento sea el mejor posible (medido según algún criterio). Si hiciéramos esta asignación probando cada configuración de cajeras y cajas, entonces el tiempo para encontrar la mejor sería simplemente prohibitivo, aún para los computadores más rápidos disponibles. Un buen ejercicio para mejor comprender esta complejidad es estimar el tiempo de ejecución si el computador pudiese realizar un millón de estas evaluaciones por segundo, sabiendo que son $50!$ configuraciones a evaluar. Es aquí donde entra a jugar un papel importante la Programación Lineal, como una forma científica de eliminar muchos millones de configuraciones mediante simples criterios de comparación y una sucesión de cálculos relativamente más sencillos.

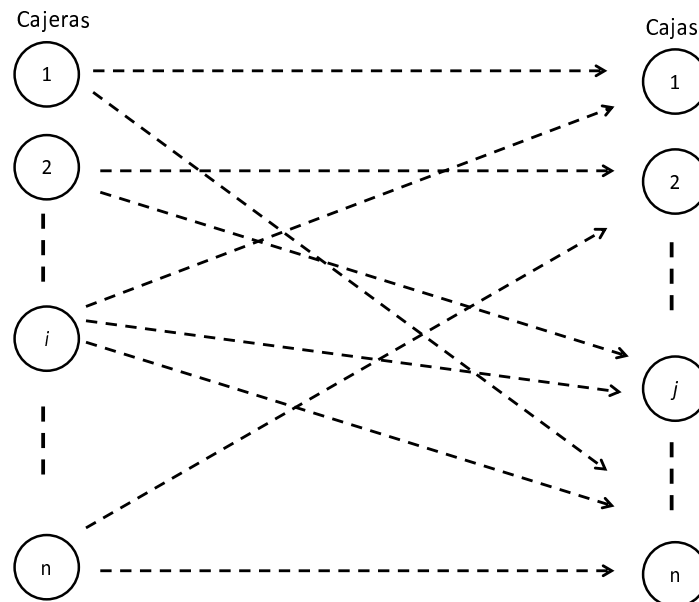


Figura 5.2: Problema de asignación. Hay $n \times n$ arcos, que corresponden a las variables del problema.

Las variables en este caso son:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al nodo (cajera) } i \text{ le corresponde el nodo (caja) } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Este problema se escribe:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{a cada cajera, una sola caja}) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{a cada caja, una sola cajera}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Los coeficientes c_{ij} representan los rendimientos de las cajeras en cada caja y la función objetivo persigue maximizar el rendimiento total.

Este problema de asignación es claramente un caso particular del problema (*FCM*) planteado al inicio del capítulo. En este caso, los nodos-cajera tienen oferta igual a 1 (pueden realizar un servicio) y los nodos-caja tienen demanda igual a 1 (solicitan ser servidos por una cajera). Los nodos-cajera no tienen arcos entrantes pues no demandan y, similarmente, los nodos-caja no tienen arcos salientes, pues no ofrecen. Las variables son enteras, con cotas 0 y 1.

5.1.2. Problema de transporte

Consideremos un grafo con un conjunto de n nodos de partida, con ofertas $a_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ y m nodos de llegada con demandas $b_j \geq 0, j = 1, \dots, m$. Cada arco (i, j) tiene asociado un costo unitario de transporte c_{ij} .

Supongamos, por ahora, que $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$, es decir, la oferta total es igual a la total. Esta condición no es restrictiva, en el sentido que si hubiese discrepancia, bastaría crear un nodo artificial en las ofertas o en las demandas, según sea el caso, pero habría que precisar cuidadosamente los costos de los arcos ligados al nodo artificial. En el caso que esos costos sean nulos, los arcos ligados al nodo artificial pueden ser interpretados como variables de holgura. Otro supuesto es que las ofertas y demandas son números enteros, lo tendrá importancia en la resolución, como veremos más adelante.

Entonces, se define el problema de transporte como el de minimización de los costos de

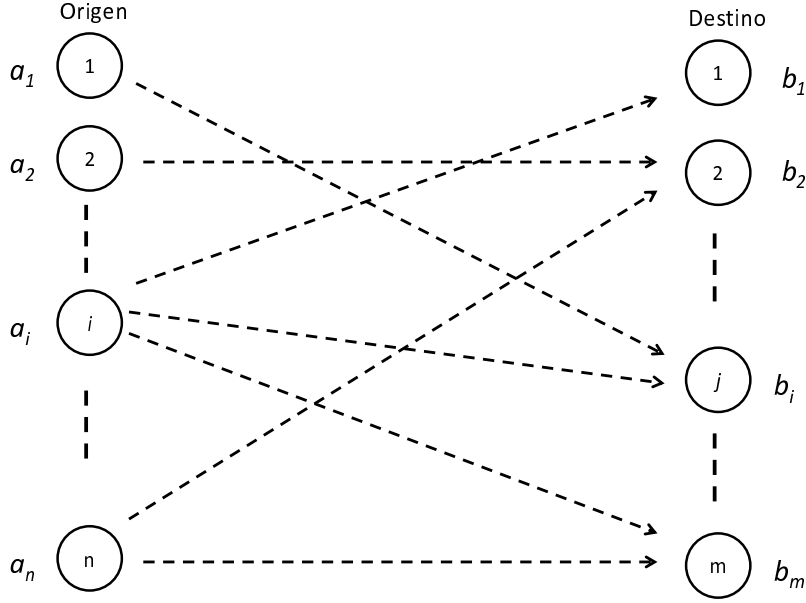


Figura 5.3: Problema de transporte. Hay $n \times m$ arcos, que corresponden a las variables del problema.

transporte de los flujos, de manera de satisfacer exactamente la oferta en cada nodo de origen y la demanda en cada nodo de destino. El problema se escribe:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{oferta}) \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{demanda}) \\
 & x_{ij} \in \mathbb{N} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

En este problema se considera que existen todos los arcos entre nodos de origen y nodos de destino. Las restricciones quedan definidas de esa forma ya que, para los nodos de origen, las ecuaciones son del tipo (flujo saliente - flujo entrante = demanda):

$$\sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = a_i,$$

y, en este caso

$$\sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = 0.$$

Análogamente, en el caso de la demanda se tiene que

$$\sum_{k/(j,k) \in \mathcal{A}} x_{jk} - \sum_{k/(k,j) \in \mathcal{A}} x_{kj} = -b_j$$

y

$$\sum_{k/(j,k) \in \mathcal{A}} x_{jk} = 0.$$

Podemos notar que el problema de asignación puede también ser interpretado como un caso particular del problema de transporte.

5.1.3. Problema de flujo máximo

Este problema es el de determinar el flujo máximo posible de un nodo origen o fuente (s) dado a un nodo destino o sumidero (t) con restricciones de capacidad en los arcos.

Si denotamos x_{ts} al flujo correspondiente a (devolver) transportar la cantidad final, desde t a s , notamos que $\max x_{ts}$ es equivalente a maximizar el flujo total transportado desde s a t , dado que el sistema se mantiene en equilibrio.

Luego, el problema se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_{ts} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_j x_{sj} - \sum_k x_{ks} - x_{ts} = 0 \quad (\text{balance en } s) \\ & \sum_j x_{tj} + x_{ts} - \sum_k x_{kt} = 0 \quad (\text{balance en } t) \\ & \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0 \quad i \neq s, t \quad (\text{balance entre nodos intermedios}) \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}' \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(t, s)\}$. Todas las sumas se extienden sobre los arcos existentes y se debe asignar capacidad $u_{ts} = \infty$ al arco artificial (t, s) .

Si $\mathcal{N}$ denota el conjunto de todos los nodos (incluidos s y t), una forma más compacta

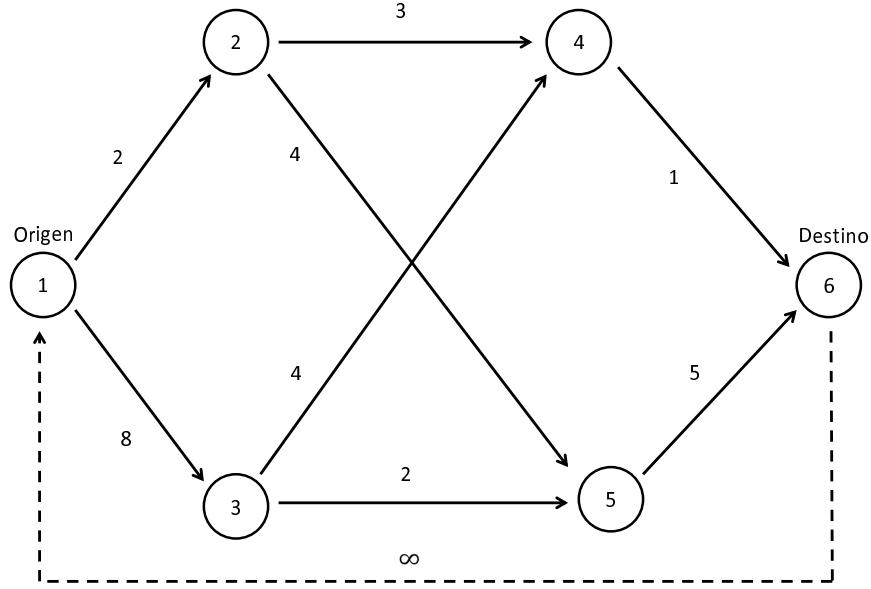


Figura 5.4: Problema de flujo máximo. Sobre los arcos se indica la capacidad.

de escribir este problema sería simplemente:

$$\begin{aligned}
 &\text{máx} && x_{ts} \\
 \text{s.a.} &&& \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}'} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}'} x_{ki} = 0 \quad i \in \mathcal{N} \text{ (balance en los nodos)} \\
 &&& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}'
 \end{aligned}$$

Se puede advertir que si existe un camino orientado desde s a t , cuyos arcos tienen capacidad infinita, entonces el problema es no acotado.

5.1.4. Problema de camino más corto

Este problema tiene como objetivo encontrar el camino más corto entre el nodo s y el nodo t en un grafo dado, es decir, encontrar una secuencia de arcos dirigidos y adyacentes entre s y t , de longitud mínima.

La longitud del arco puede ser interpretada en términos de costo, tiempo, distancia, etc. El problema se escribe

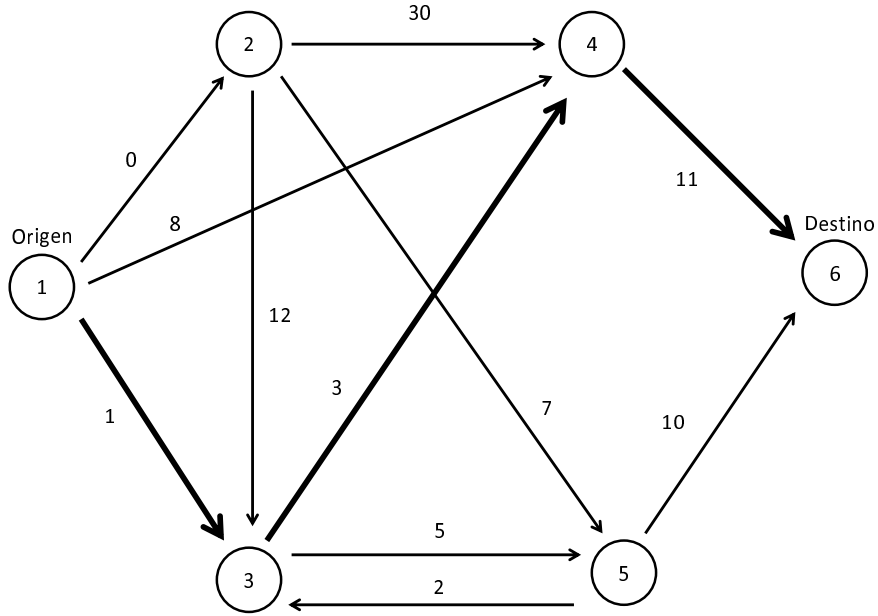


Figura 5.5: Problema de camino más corto. Sobre los arcos se indica la distancia.

$$\begin{aligned}
 &\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 &\text{s.a.} \quad \sum_j x_{sj} = 1 \quad (\text{nodo } s \text{ ofrece una unidad}) \\
 &\quad \quad \sum_k x_{kt} = 1 \quad (\text{nodo } t \text{ demanda una unidad}) \\
 &\quad \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0 \quad i \neq s, t \quad (\text{balance en nodos intermedios}) \\
 &\quad \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

Esta formulación se basa en que una unidad de producto viaja desde el nodo origen s al nodo destino t , de manera que al minimizar el costo total se está definiendo un camino de costo mínimo. El nodo origen es oferente y el nodo destino es demandante, siendo los restantes nodos de oferta (demanda) nula.

5.2. Resolución del problema de transporte

La resolución del problema de transporte será aquí abordada usando el algoritmo Simplex, adaptado a la estructura particular de este problema. Para esto, describiremos tres etapas del algoritmo, a saber:

- Obtener una solución básica factible inicial.
- Examinar si una solución básica factible es óptima.
- Modificar una solución básica factible (si no es óptima).

5.2.1. Obtener una solución básica factible inicial (Fase I)

El sistema de ecuaciones (restricciones) del problema de transporte es del tipo $Ax = b$, en que la matriz A es de orden $(n + m) \times (nm)$ y tiene en cada columna un 1, un -1 y el resto son ceros (esto, porque cada arco es saliente desde un nodo y entrante en otro, y no participa en las demás ecuaciones). Por esta razón, dado que se ha supuesto que la oferta total iguala a la demanda total, entonces el sistema tiene una ecuación redundante. Eso significa que las bases tendrán $n + m - 1$ variables.

Se puede probar que las bases de este problema son **árboles**, es decir subgrafos de una estructura particular que definimos a continuación.

Definición 5.2.1 *Un **árbol** es un grafo que satisface:*

- *Es conexo, es decir, existe una secuencia de arcos entre dos nodos cualesquiera (sin considerar la orientación de los arcos), y*
- *No contiene ciclos, es decir, partiendo de un nodo no se puede volver a él por una secuencia de arcos adyacentes (sin importar la orientación).*

Una forma simple de encontrar un árbol en un grafo correspondiente a un problema de transporte es el procedimiento de saturación que describiremos a continuación a través de un ejemplo. Consideremos tres nodos de oferta y cuatro nodos de demanda, dados por el grafo mostrado en la figura siguiente. Las ofertas y demandas son indicadas en el grafo y los costos unitarios de transporte están dados por la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 & 9 \\ 9 & 12 & 13 & 7 \\ 14 & 9 & 16 & 5 \end{bmatrix}$$

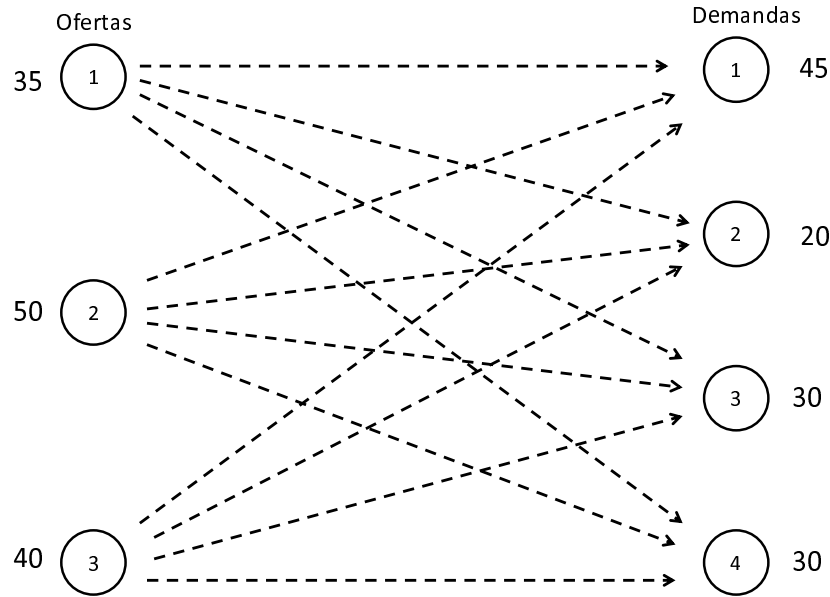


Figura 5.6: Ejemplo de problema de transporte.

Procedimiento de saturación: Sea $n + m$ el número de nodos del grafo. Dado que el sistema de ecuaciones correspondiente a las restricciones de balance o equilibrio en los nodos tiene una ecuación redundante, en la solución básica factible deben haber $n + m - 1$ arcos con flujos positivos y los demás están en cero, es decir, $nm - (n + m - 1)$ arcos son arcos no básicos (nulos). Esto, pues las bases de este problema son de orden $n + m - 1$.

El método de saturación empieza cuando se satura el primer arco (elegido arbitrariamente), esto es, se elige un arco al cual se le asigna el máximo flujo posible, satisfaciendo así la demanda de los nodos demandantes, luego se prosigue de la misma manera con el resto de los arcos, hasta satisfacer la demanda de todos los nodos. Observemos el ejemplo, con 3 nodos-origen de ofertas 35, 50 y 40 respectivamente, y 4 nodos-destino con demandas 45,

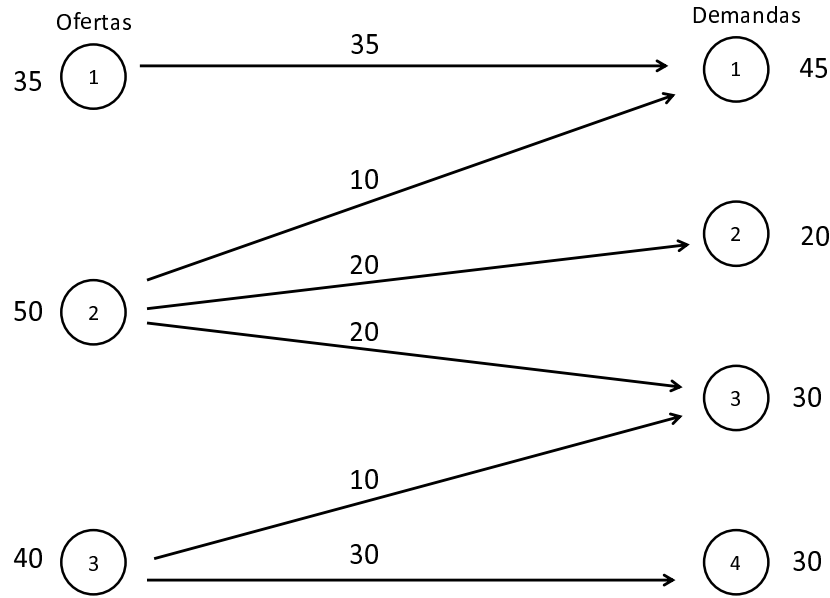


Figura 5.7: Procedimiento de saturación

20, 30 y 30. Al primer arco $(1, 1)$ se asigna el flujo $x_{11} = 35$, que el máximo posible y corresponde a la oferta del nodo-origen 1. Eso quiere decir que el nodo-origen 1 queda saturado, en el sentido que ya entregó toda su oferta. El nodo-destino 1, que con esto tiene demanda residual igual a 10, puede ser saturado desde el nodo-origen 2, el cual queda con oferta residual igual a 40. Esas 40 unidades pueden ser trasladadas al nodo-destino 2, con lo cual el nodo-origen 2 queda saturado y el nodo-destino 2 tiene demanda residual cero. Este es un caso especial, puesto que se asigna entonces flujo de valor cero al arco $(3, 2)$. Repitiendo el procedimiento, el nodo-origen 3 entrega 10 unidades al nodo-destino 3 y 30 al nodo-destino 4.

Notar que este procedimiento produce una solución factible que corresponde a una base, pues el grafo así generado es un árbol de 6 arcos (esto es $3+4-1$). Además se puede generar distintas bases factibles cambiando el orden de saturación. En el ejemplo se usó el orden correlativo de los nodos de origen y destino, pero bastaría con reordenarlos para que este procedimiento generara una base distinta.

Por otro lado, podemos calcular el costos asociado a esta solución, el cual resulta ser $z = 1180$.

Procedimiento de saturación a costo mínimo. Como hemos dicho, el orden de saturación es irrelevante, de manera que podemos ir haciendo entrar los arcos a la base, de acuerdo a los costos de estos, buscando producir una solución de bajo costo esperado. Entonces ahora saturamos siguiendo en cada paso el costo mínimo, es decir, comenzamos saturando desde el arco que posee el menor costo al de mayor costo. Este procedimiento también produce un árbol o solución básica factible.

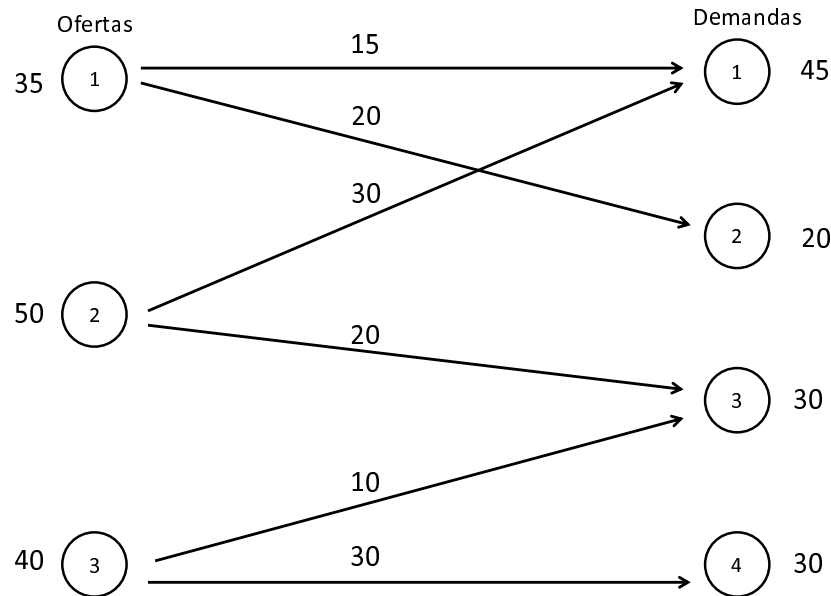


Figura 5.8: Procedimiento de saturación a costo mínimo

En el ejemplo, el arco de costo más bajo es el arco $(3, 4)$, de manera que saturamos $x_{34} = 30$ y este valor de flujo se resta de los dos nodos involucrados, lo cual hace que la demanda del nodo se anula y la oferta del nodo 1 se rebaja a 10. Como el nodo destino 4 satisface su demanda, entonces es eliminado del proceso lo cual significa que se procede a eliminar todos los arcos incidentes en él. De los restantes arcos, el de mínimo costo es $(1, 2)$, y se debe saturar entonces $x_{12} = 20$, quedando la oferta del nodo 1 en valor 15 y la demanda del nodo 2 en valor 0. Se procede a eliminar ahora del proceso al nodo destino 2.

Siguiendo de esta forma se llega a una base (árbol) que consta de los arcos $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$ y $(3, 4)$, cuyo valor de función objetivo es $z = 1080$. Notar que es algo menor que el valor de la solución anterior, obtenida por el proceso de saturación simple, pero esto no corresponde a una propiedad sino más bien a una simple casualidad.

5.2.2. Examinar si una solución básica factible es óptima

Notemos que si los datos a_i, b_j son enteros, entonces los flujos x_{ij} son enteros (de acuerdo a los procedimientos que hemos descrito), pues se trata de diferencias de números enteros (dados por las ofertas y demandas). Esto muestra que todos los puntos extremos del problema de transporte tienen coordenadas enteras, en el caso de ofertas y demandas enteras. Por esta razón, el problema de optimización lineal es del tipo canónico

$$\text{mín } c^T x, \text{ s.a. } Ax = d, x \geq 0,$$

en el cual no se impone la condición de integridad de las variables de manera explícita. Notar que el vector d está dado por una columna que concatena los vectores $a = (a_i)$ y $b = (b_j)$.

Las restricciones son de dos tipos: de oferta (n) y de demanda (m). Es decir, hay dos tipos de variables duales, que llamaremos u_i y v_j , asociadas respectivamente a los nodos de origen y de destino. Entonces el problema dual se puede escribir

$$(D) \quad \text{máx} \quad \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{j=1}^m b_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

dado que en cada columna de la matriz A hay solamente dos coeficientes iguales a 1 y los restantes son nulos.

Supongamos entonces que tenemos una solución básica factible (una solución factible con estructura de árbol, tal como la última, generada por la saturación a costo más bajo). Los costos reducidos para las variables básicas están dados por

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - \pi^T B = 0$$

en que $\pi^T = (u^T, v^T)$ es el vector de variables duales. De allí, dada la estructura de la matriz B , se tiene

$$(\alpha) \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0 \quad \text{para todo arco básico}$$

Análogamente, los costos reducidos para las variables no básicas son

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N,$$

lo que implica

$$(\beta) \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \quad \text{para todo arco no básico}$$

El conjunto de ecuaciones (α) representa un sistema de $m + n - 1$ ecuaciones y $m + n$ incógnitas, de rango $m + n - 1$. Entonces podemos fijar una variable dual (cualquiera) en

un valor arbitrario y usar (α) para encontrar todas las restantes variables duales (eso es posible, dado que el sistema recorre un árbol, en el cual en cada paso se puede despejar una variable u_i o v_j). En este ejemplo (puede ser cualquier variable y en cualquier valor real), fijamos $u_1 = 0$, lo que implica que $v_2 = 8$ y los valores de las demás variables duales quedan determinadas así:

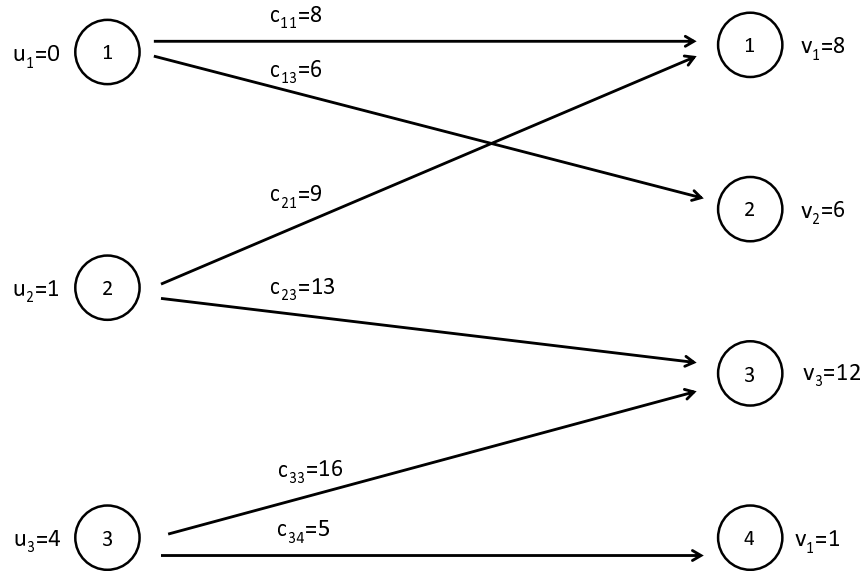


Figura 5.9: Procedimiento de determinación de variables duales

Con estos valores es posible determinar los costos reducidos de los arcos no básicos, usando las ecuaciones (β) , de manera de decidir si alguno puede entrar a la base (costo reducido negativo). Esto es,

$$\begin{aligned}\bar{c}_{13} &= -2 \\ \bar{c}_{14} &= 8 \\ \bar{c}_{22} &= 5 \\ \bar{c}_{24} &= 5 \\ \bar{c}_{31} &= 2 \\ \bar{c}_{32} &= -1\end{aligned}$$

Es sabido que si $\bar{c}_{ij} \geq 0$, para todo arco no básico, entonces la solución en curso es óptima. En este caso eso no es cierto y se observa que dos arcos pueden entrar a la base, mejorando

el valor de la función objetivo. En la sección siguiente mostraremos cómo iterar para realizar el cambio de base.

5.2.3. Modificar una solución básica factible (si no es óptima)

Decidimos ingresar la variable x_{13} a la base, es decir aumentaremos el flujo de ese arco hasta la saturación, de manera de mantener factibilidad. Naturalmente, al aumentar el flujo en ese arco, se deben modificar los flujos de los arcos del ciclo que la introducción de propio arco genera en el árbol básico, tal como se muestra en el grafo.

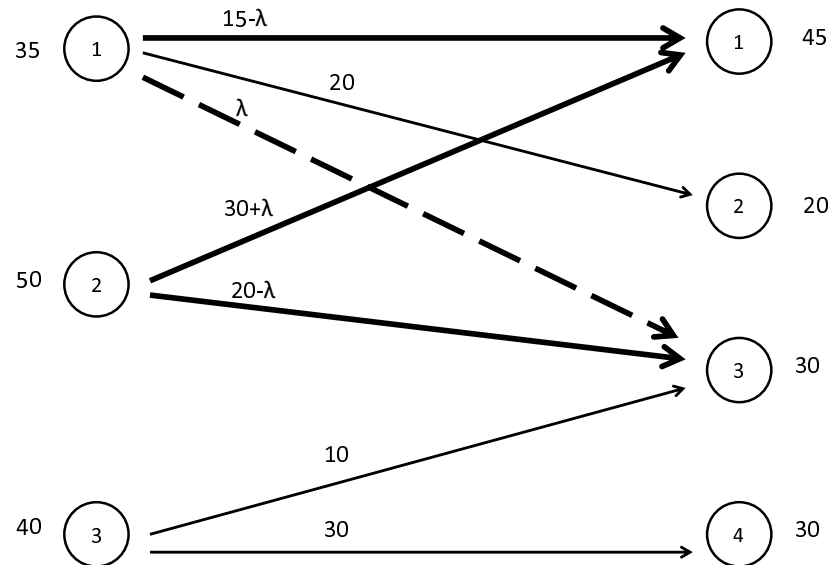


Figura 5.10: Aumento del flujo en arco que entra a la base.

Las condiciones de factibilidad que debe cumplir el valor λ solamente se deben imponer en los arcos del ciclo que el arco ingresado genera, tal como se indica en la figura. Entonces, se impone:

$$\begin{aligned} 15 - \lambda &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ 30 + \lambda &\geq 0 \\ 20 - \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $0 \leq \lambda \leq 15$. El mayor decrecimiento de la función objetivo se obtiene con $\lambda = 15$, lo cual implica que la variable (arco) x_{11} se anula y sale de la base (si hay más de una arco que se anula al maximizar λ , entonces solamente uno de ellos debe salir de la base, quedando los demás en la base con valor de flujo igual a cero). En nuestro ejemplo, la nueva solución básica está dada por el grafo siguiente, con valor de la función objetivo $z = 1050$.

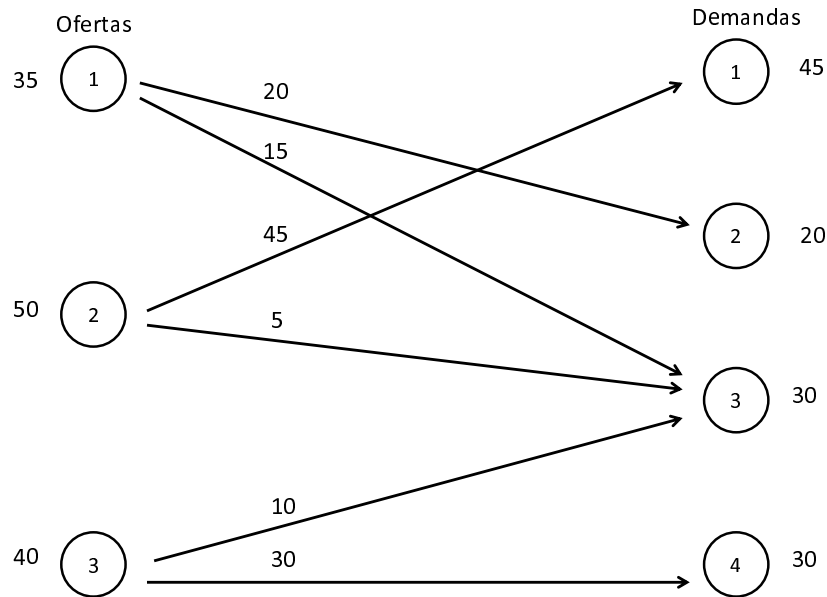


Figura 5.11: Nueva solución básica.

Este procedimiento se puede entonces reiterar, realizando de nuevo los cálculos mostrados en la sección anterior, hasta que todos los costos reducidos sean mayores o iguales a cero.

5.3. Flujo de costo mínimo: mejoramiento de una solución en curso

En esta sección trataremos el problema de cómo verificar optimalidad de una solución básica factible y cómo mejorarla, para el problema general de flujo de costo mínimo. Lo que haremos será esencialmente extender los conceptos introducidos en las secciones anteriores sobre el problema de transporte. No trataremos aquí el problema de encontrar una solución básica factible (o fase I), sino que supondremos que ella es conocida.

Consideremos de nuevo el problema del ejemplo introductorio de este capítulo:

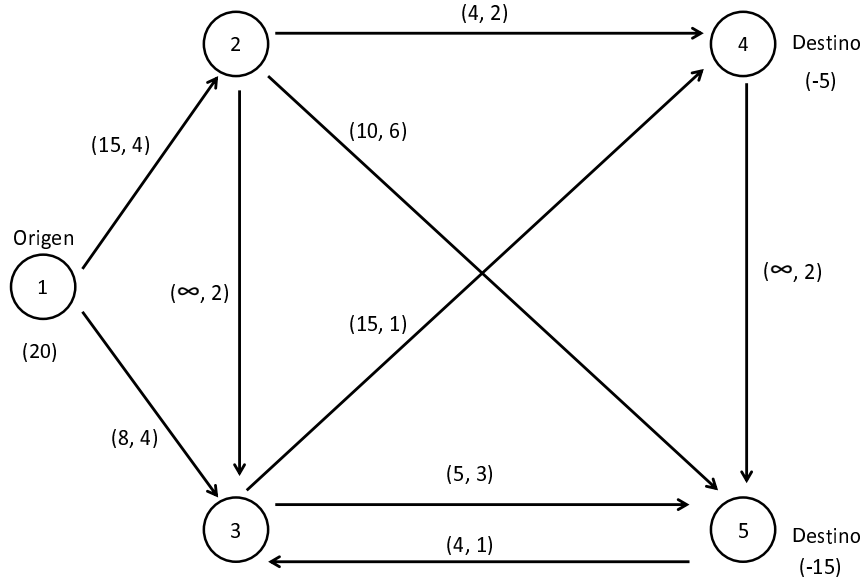


Figura 5.12: Problema de flujo de costo mínimo.

Como hemos visto, este problema se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (FCM) \quad \min \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} &= b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
 l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

pero, en este ejemplo, usamos $l_{ij} = 0$ para todos los arcos. En este caso, tampoco imponemos de manera explícita la integridad de las variables de flujo (en el caso de ofertas y demandas enteras), pues las bases factibles son también árboles.

Sean n el número de nodos de la red y $m = \#\mathcal{A}$, el número de arcos. La matriz del grafo es de $n \times m$ y las bases están compuestas por $n - 1$ arcos, como en el caso del ejemplo, mostrado en el grafo más abajo. Los arcos no dibujados se entienden de flujo nulo. La base indicada está compuesta por 4 arcos: $\{(1, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$. Los arcos $(1, 3)$ y $(3, 5)$ no

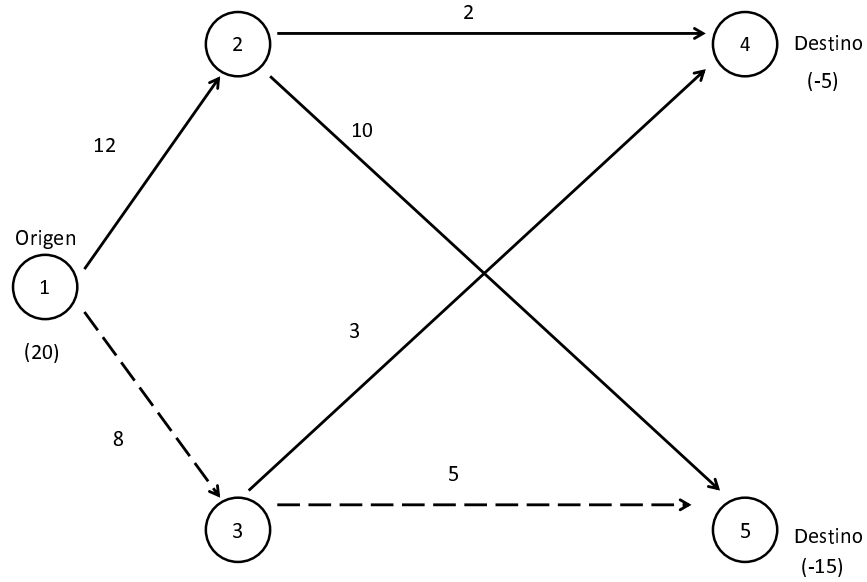


Figura 5.13: Base del problema de flujo. Los valores de los flujos están indicados en los arcos.

son básicos, pero tampoco tienen flujo nulo. Extenderemos ahora el concepto de base al caso de la programación lineal con cotas, que es el caso del problema de flujo de costo mínimo.

Extensión del concepto de base. Consideremos el problema escrito en la forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

donde l y u son vectores. En el caso del problema de flujo que estamos considerando, A es del orden $n \times m$ y de rango filas completo, eventualmente, en el caso de un problema de flujo, eliminando una fila redundante. Se define entonces la base de la manera siguiente: sea $A = [B, N]$ una descomposición de la matriz de restricciones y sean las variables x_B y x_N las coordenadas correspondientes de la variable x . Igualmente, consideremos las particiones correspondientes para las cotas y el vector de costos: l_B, l_N, u_B, u_N, c_B y c_N .

Una variable **no básica** es aquella fijada en alguna de sus cotas y las **variables básicas** se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones (respetando sus cotas). Entonces:

- $x_{N_i} = l_{N_i} \vee u_{N_i}$
- $l_B \leq x_B \leq u_B$, donde $Bx_B = b - Nx_N$

En el caso del problema de flujo del ejemplo los arcos (1, 3) y (3, 5) son no básicos y están en su cota superior. De manera análoga al caso del problema de transporte, los costos reducidos se pueden determinar usando usando el hecho que

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - \pi^T B = 0,$$

en que π^T es el vector de variables duales y, dada la estructura de la matriz B en este caso, se tiene que

$$(\alpha') \quad c_{ij} = \pi_i - \pi_j \quad \text{para todo arco básico.}$$

Análogamente, los costos reducidos para las variables no básicas son

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N,$$

lo que implica

$$(\beta') \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j \quad \text{para todo arco no básico.}$$

Condición de optimalidad. Se dice que la solución en curso es óptima si se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &\geq 0 & \text{si } l_{ij} = x_{ij} & \quad (\text{en cota inferior}) \\ \bar{c}_{ij} &= 0 & \text{si } l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \\ \bar{c}_{ij} &\leq 0 & \text{si } x_{ij} = u_{ij} & \quad (\text{en cota superior}) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (α') , para las variables básicas, permiten determinar los valores de las variables duales. Dado que hay n nodos y $n - 1$ arcos básicos, basta fijar arbitrariamente el valor de una variable dual. Para el caso del ejemplo, fijemos $\pi_2 = 0$, de donde se obtiene:

$$\pi = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Luego, se calculan los costos reducidos de los arcos no básicos mediante (β') , de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= c_{13} - (\pi_1 - \pi_3) = -1 \\
\bar{c}_{23} &= c_{23} - (\pi_2 - \pi_3) = 1 \\
\bar{c}_{35} &= c_{35} - (\pi_3 - \pi_5) = -2 \\
\bar{c}_{45} &= c_{45} - (\pi_4 - \pi_5) = -2 \\
\bar{c}_{53} &= c_{53} - (\pi_5 - \pi_3) = 6
\end{aligned}$$

Regla de entrada a la base. Son candidatos para ingresar a la base:

- Arcos no básicos de costo reducido negativo que están en su cota inferior.
- Arcos no básicos de costo reducido positivo que están en su cota superior.

En este caso, solamente el flujo x_{45} puede entrar a la base, pues está en su cota inferior (cero) y tiene costo reducido negativo ($\bar{c}_{45} = -2$).

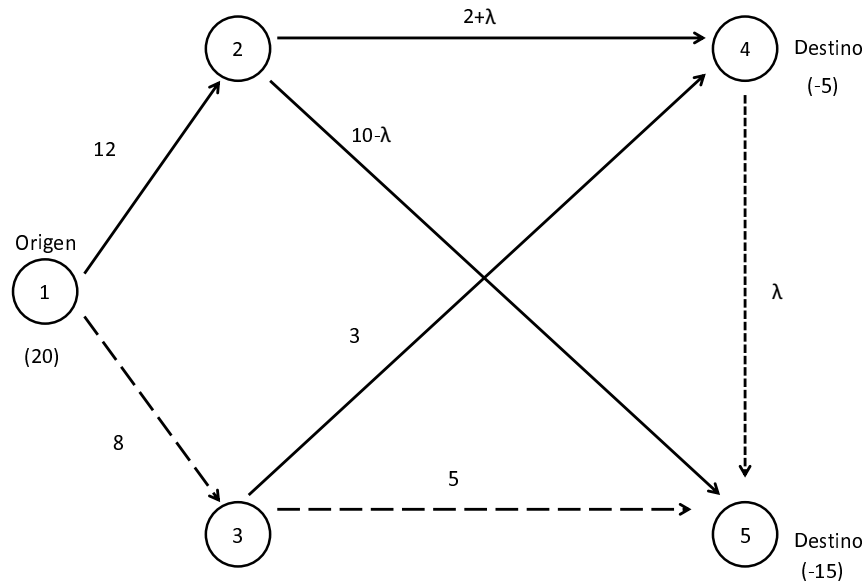


Figura 5.14: Ciclo generado por la variable que entra a la base.

Sea λ el flujo del arco $(4, 5)$. Por factibilidad, se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2 + \lambda \leq 4 \\
0 &\leq \lambda \\
0 &\leq 10 - \lambda \leq 10
\end{aligned}$$

de manera que $0 \leq \lambda \leq 2$, lo que implica que el arco $(2, 4)$ sale de la base (alcanza su cota superior) y se genera una nueva solución básica, que consta de las variables x_{12} , x_{25} , x_{34} y x_{45} .

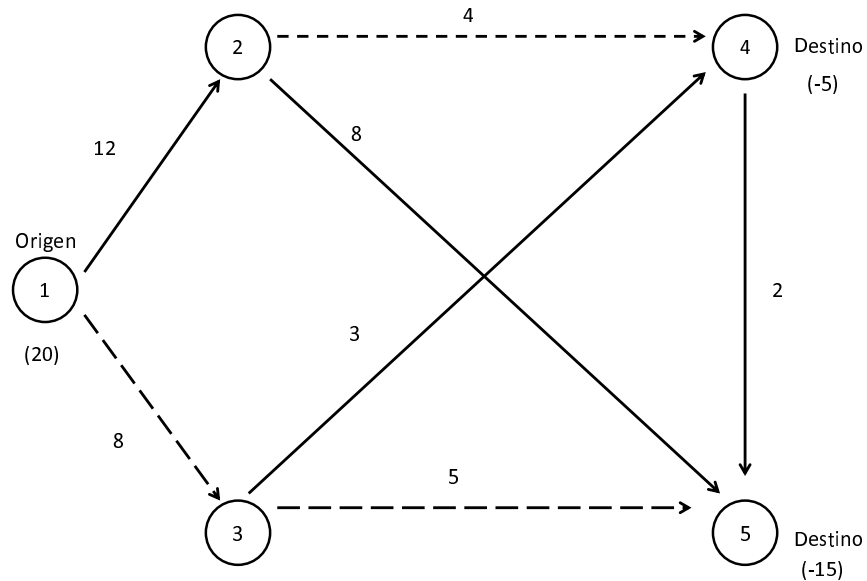


Figura 5.15: Nueva solución básica factible.

Este proceso se puede entonces repetir, de manera de verificar si esta solución es óptima y, si no lo es, mejorarla de la misma manera aquí mostrada.

Notar que el valor del flujo (λ) que entra a la base se considera siempre positivo, pero si se tratara de un arco que está fuera de la base, pero en su cota superior, este valor debería ser restado a ese flujo. En consecuencia se procede en los demás arcos del ciclo generado por ese arco.

A modo de ejercicio, se sugiere continuar el procedimiento hasta la optimalidad, indicando en cada iteración el valor de la función objetivo.

Capítulo 6

Algoritmos para Programación no Lineal

En este capítulo estudiaremos algunos métodos numéricos para la resolución del problema

$$\begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ x \in S \end{array}$$

donde la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es en general diferenciable (en algunos casos, puede ser necesario imponer condiciones adicionales) y el conjunto S es un convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$. En el caso que $S = \mathbb{R}^n$ se habla de **Optimización sin restricciones**.

Aunque el conjunto S puede tener naturaleza bastante variable y general, en este capítulo consideramos solamente el caso en que S puede ser descrito mediante un conjunto de igualdades y desigualdades, es decir,

$$\begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l \end{array}$$

en que normalmente suponemos que tanto g_i , $i = 1, \dots, m$ como h_j , $j = 1, \dots, l$ son diferenciables. Esto se denomina **Optimización con restricciones**.

Esquema general de resolución. La resolución numérica de estos problemas será abordada siguiente un esquema iterativo: dado un punto de partida $x_0 \in S$ se construye una sucesión $\{x_k\}$, contenida en S , según la formula

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

donde d_k es una dirección de descenso (es decir, $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$) y λ_k es un paso, que satisface

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k + \lambda d_k) \quad \forall \lambda \geq 0, \quad x_k + \lambda d_k \in S$$

Ciertamente, el valor de λ_k podría no ser único. Otra posibilidad es que $f(x_k + \lambda d_k)$ diverja a $-\infty$ cuando λ tiende a infinito y se cumple $x_k + \lambda d_k \in S$, para todo $\lambda \geq 0$. En ese caso, el problema (P) es no acotado.

Dada la dirección d_k , el problema de encontrar el paso λ_k es un problema de minimización unidimensional

$$(L) \quad \begin{aligned} &\text{mín } \varphi(\lambda) \\ &\lambda \in [0, \bar{\lambda}_k] \end{aligned}$$

en que $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$ y $\bar{\lambda}_k = \sup\{\lambda / x_k + \lambda d_k \in S\}$.

La dirección d_k puede ser elegida de diversas maneras, según veremos en las secciones siguiente. A modo de ejemplo, en el caso no restringido, se puede elegir simplemente

$$d_k = -\nabla f(x_k),$$

pues si x_k no es punto estacionario ($\nabla f(x_k) \neq 0$), entonces $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$. Esta es la base del método del gradiente, que veremos a continuación.

Más en general, si S es una matriz definida positiva, entonces es fácil probar que

$$d_k = -S \nabla f(x_k)$$

es también una dirección de descenso, puesto que $\nabla f(x_k)^T d_k = -\nabla f(x_k)^T S \nabla f(x_k) < 0$, si $\nabla f(x_k) \neq 0$. Esto justifica el método de Newton, en el cual se elige

$$d_k = -H(x_k)^{-1} \nabla f(x_k),$$

siendo $H(x_k)$ la matriz Hessiana de f , evaluada en x_k . Este método es muy bueno cuando la función f es (estrictamente) convexa.

6.1. Optimización sin restricciones

6.1.1. Método del gradiente (descenso más pronunciado)

Consideremos el problema irrestricto

$$(P) \quad \text{mín } f(x)$$

Una propiedad interesante de la dirección del gradiente es que ella es la de máximo descenso, en el sentido que es solución del problema

$$\begin{aligned} & \min \nabla f(x_k)^T d \\ & \|d\| \leq 1 \end{aligned}$$

En efecto, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede decir que $\nabla f(x_k)^T d \geq -\|\nabla f(x_k)\| \|d\|$ y la cota inferior se alcanza en

$$d = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}.$$

Esto sugiere usar la dirección $d_k = -\nabla f(x_k)$ como dirección de búsqueda, es decir, el algoritmo está dado por la formula iterativa:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) \tag{6.1}$$

donde el paso λ_k es la solución del problema unidimensional (L) . El método puede entonces presentarse de la manera siguiente:

Algoritmo del gradiente

[0] Sea $\varepsilon > 0$, $k = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

[1] Si $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$, entonces detener el proceso, pues x_k es una buena aproximación a un punto estacionario de (P) . Si no, elegir la dirección

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

e ir a [2]

[2] Encontrar λ_k que minimiza $f(x_k - \lambda \nabla f(x_k))$, $\lambda \geq 0$ (es decir, resolver (L))

[3] Actualizar

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k),$$

hacer $k \leftarrow k + 1$ e ir a [1]

Observación 6.1.1 *Observar que el método elige, a partir de x_k , una dirección ortogonal a la curva de nivel de la función f en ese punto. En ese sentido corresponde a una discretización de la trayectoria dada por la ecuación diferencial ordinaria*

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)), \quad t \geq 0,$$

la cual, bajo ciertas condiciones de regularidad, satisface $x(t) \longrightarrow x^$ si $t \longrightarrow \infty$, siendo x^* un punto estacionario de f .*

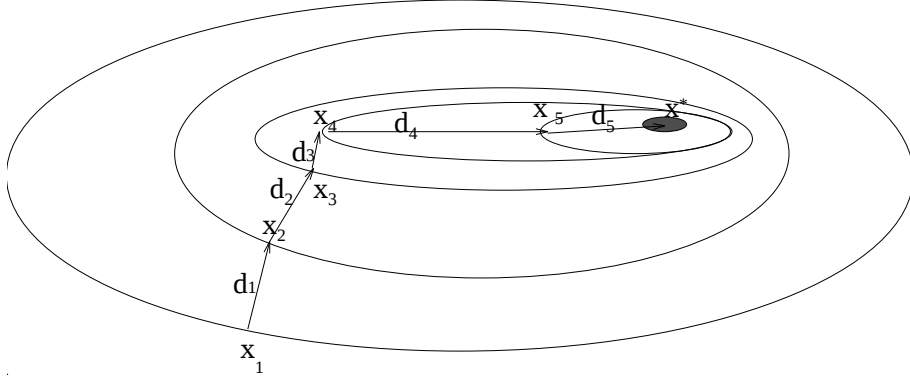


Figura 6.1: Esquema de un método iterativo sin restricciones.

Ejemplo 6.1.1 Consideremos el caso cuadrático $f(x) = c^T x + \frac{1}{2}x^T Qx$, con Q (simétrica) definida positiva. En lo que sigue denotaremos $g_k = c + Qx_k$ al gradiente de f evaluado en x_k .

Entonces la dirección es dada por $d_k = -g_k$.

Se necesita determinar el paso en cada iteración. Recordemos que (de la definición del problema (L))

$$\varphi(\lambda) = f(x_k - \lambda g_k).$$

Entonces se puede determinar λ_k resolviendo la ecuación $\varphi'(\lambda) = 0$, es decir,

$$0 = \varphi'(\lambda) = -\nabla f(x_k - \lambda g_k)^T g_k = -[c + Q(x_k - \lambda g_k)]^T g_k = -g_k^T g_k + \lambda g_k^T Q g_k$$

de donde $\lambda_k = -\frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k}$.

Se obtiene entonces la formula iterativa (explícita) del método del gradiente en el caso cuadrático definido positivo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T Q g_k} g_k.$$

Este método es convergente a un punto estacionario de f , bajo hipótesis bastante generales. Demostraremos esta convergencia solamente en el caso de funciones cuadráticas definidas positivas, como la del ejemplo anterior.

Para esto, definamos una función auxiliar que mide el error de una estimación del punto

estacionario,

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2}(x - x^*)^T Q(x - x^*) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_Q^2,$$

donde x^* es solución óptima del problema cuadrático irrestricto, es decir, $x^* = -Q^{-1}c$.

Notar que este es esencialmente el cuadrado del error de x con respecto a x^* , usando la norma inducida por la matriz Q . Observemos además que las funciones f y ϵ difieren solamente en una constante, puesto que

$$\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^{*T}Qx^*,$$

lo que significa que minimizar f es equivalente a minimizar ϵ , cuyo valor mínimo es obviamente cero, dado que Q es definida positiva.

Lema 6.1.1 $\epsilon(x_{k+1}) = \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T Q g_k)(g_k^T Q^{-1} g_k)}\right] \epsilon(x_k)$

Demostración. De la definición de ϵ y de 6.1.1 se tiene que

$$\epsilon(x_{k+1}) = \frac{1}{2}(x_k - \lambda_k g_k - x^*)^T Q(x_k - \lambda_k g_k - x^*).$$

Notando que $Q(x_k - x^*) = g_k$ y que $\epsilon(x_k) = \frac{1}{2}g_k^T Q^{-1} g_k$ se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} [(x_k - x^*)^T Q(x_k - x^*) + \lambda_k^2 g_k^T Q g_k - 2\lambda_k (x_k - x^*)^T Q g_k] \\ &= \epsilon(x_k) + \frac{\lambda_k^2}{2} g_k^T Q g_k - \lambda_k g_k^T g_k \\ &= \epsilon(x_k) - \frac{(g_k^T g_k)^2}{2g_k^T Q g_k} \\ &= \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T Q g_k)(g_k^T Q^{-1} g_k)}\right] \epsilon(x_k), \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

Este lema permite dar una tasa de convergencia del método del gradiente, en el caso de funciones cuadráticas definidas positivas. Para esto, es necesario recordar una propiedad de las matrices definidas positivas, conocida como desigualdad de Kantorovich: sea Q una matriz

definida positiva y sean λ_m y λ_M sus valores propios más pequeño y más grande respectivamente. Entonces se cumple:

$$\frac{(u^T u)^2}{(u^T Q u)(u^T Q^{-1} u)} \geq \frac{4\lambda_m \lambda_M}{(\lambda_m + \lambda_M)^2} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$$

Aplicando esta desigualdad al lema precedente, tenemos que

$$\epsilon(x_{k+1}) \leq \left[1 - \frac{4\lambda_m \lambda_M}{(\lambda_m + \lambda_M)^2} \right] \epsilon(x_k),$$

es decir,

$$\epsilon(x_{k+1}) \leq \left[\frac{\lambda_M - \lambda_m}{\lambda_M + \lambda_m} \right]^2 \epsilon(x_k).$$

Si denotamos $\rho = \left[\frac{\lambda_M - \lambda_m}{\lambda_M + \lambda_m} \right] \in [0, 1[$, entonces

$$\epsilon(x_{k+1}) \leq \rho^2 \epsilon(x_k),$$

o bien

$$\|x_{k+1} - x^*\|_Q \leq \rho \|x_k - x^*\|_Q$$

lo que implica que $\epsilon(x_k) \rightarrow 0$, si $k \rightarrow \infty$. Es decir, $x_k \rightarrow x^*$, si $k \rightarrow \infty$.

Se puede ver que si la matriz Q es diagonal, entonces los dos valores propios extremos coinciden y se tiene que $\epsilon(x_1) = 0$, cualquiera que sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, lo que significa que el método converge en una iteración. Si no, la velocidad de convergencia depende la diferencia entre λ_M y λ_m , es decir, de la excentricidad de la forma cuadrática. Esto muestra que el método del gradiente converge **linealmente** en este caso (cuadrático definido positivo), según la definición que damos a continuación.

Definición 6.1.1 Si $\{x_k\}$ es una sucesión convergente a $\bar{x}$, entonces

- $\{x_k\}$ converge **linealmente** si existen $\rho \in]0, 1[$ y k_0 tales que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \rho \|x_k - \bar{x}\|, \quad \forall k \geq k_0.$$

- $\{x_k\}$ converge **superlinealmente** si existen $\{\beta_k\} \subset \mathbb{R}_+$ con $\beta_k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$, y k_0 tales que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \beta_k \|x_k - \bar{x}\|, \quad \forall k \geq k_0.$$

- $\{x_k\}$ converge **cuadráticamente** si existen $\beta \in \mathbb{R}_+$ y k_0 tales que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \beta \|x_k - \bar{x}\|^2, \quad \forall k \geq k_0.$$

Proposición 6.1.1 *Convergencia cuadrática $\implies$ convergencia superlineal $\implies$ convergencia lineal.*

6.1.2. Método de Newton

La idea del método de Newton es relativamente simple: se aproxima localmente la función a minimizar mediante una función cuadrática y luego se determina el mínimo de esta aproximación. Dicho punto es una aproximación del mínimo de f , construyendo así un método iterativo. Sea entonces $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^2 y q la aproximación cuadrática, en un entorno de x_k ,

$$q(x) = f(x_k) + g_k^T(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k(x - x_k)$$

donde $g_k = \nabla f(x_k)$ y $H_k = H(x_k) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x_k)$ es la matriz hessiana de f evaluada en x_k .

Una condición necesaria de mínimo de q es que $\nabla q(x) = 0$, es decir,

$$g_k + H_k(x - x_k) = 0$$

es decir,

$$x = x_k - H_k^{-1} g_k$$

siempre que H_k^{-1} exista. Bajo el supuesto que q aproxima bien a f , se puede asumir que x aproxima bien al mínimo de f (lo cual podría estar lejos de la realidad). Esto sugiere el método (de Newton):

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1} g_k.$$

Ejemplo 6.1.2 *Veamos el caso simple (P) $\min f(x)$, con $f(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$ (campana de Gauss invertida). La formula de Newton aplicada a este caso es*

$$x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k) = \frac{2x_k^3}{1 - 2x_k^2}.$$

Entonces, se observa que si $|x_0| < 1/2$, se tiene que $\{x_k\}$ converge a cero, que es la solución del problema (P).

Si se parte de un punto tal que $|x_0| = 1/2$, entonces $x_1 = -x_0$, $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2$ y así sucesivamente, es decir, la sucesión oscila sin converger.

Si se parte de un punto tal que $x_0 > 1/2$ o bien $x_0 < -1/2$, entonces la sucesión diverge a $+\infty$ o bien $-\infty$, según el caso.

Se ha detectado así una región de convergencia del método, dada por la bola abierta $B(0, \frac{1}{2})$.

Se sugiere, como ejercicio, analizar similarmente el caso (en dos variables) $f(x, y) = -\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{2}$ y describir la región de convergencia. Damos a continuación, sin demostración, el teorema de convergencia (local) del algoritmo de Newton.

Teorema 6.1.1 Sean $f \in C^2$ y $x^* \in \mathbb{R}^n$, tales que $\nabla f(x^*) = 0$ y $H(x^*)$ es definida positiva. Entonces existe $r > 0$, tal que si $x_0 \in B(x^*, r)$, el algoritmo

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1} g_k, \quad k \geq 0$$

converge a x^* .

Velocidad de convergencia del método de Newton

Bajo las hipótesis del teorema precedente, podemos escribir

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - H_k^{-1} g_k \\ &= H_k^{-1} [H_k(x_k - x^*) - (g_k - g^*)] \end{aligned} \tag{6.2}$$

donde $g^* = \nabla f(x^*) = 0$.

Observación 6.1.2 En lo que sigue usaremos la definición de norma de una matriz:

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \{\|Av\|\}$$

la que, en particular, satisface la desigualdad $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

Como $f \in C^2$, existen $\mu > 0$ y $r > 0$ tales que

$$\|H(x)^{-1}\| \leq \mu, \quad \forall x \in B(x^*, r)$$

luego, existe k_0 tal que para $k \geq k_0$, y usando (6.2) se cumple

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &= \|H_k^{-1} [H_k(x_k - x^*) - (g_k - g^*)]\| \\ &\leq \mu \| [H_k(x_k - x^*) - (g_k - g^*)] \| \\ &= \mu \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H(x_k)(x_k - x^*)\| \end{aligned} \quad (6.3)$$

Usando el teorema del valor medio, tenemos que

$$\nabla f(x_k) = \nabla f(x^*) + H(x_k)(x_k - x^*) + \int_0^1 [H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)](x_k - x^*) d\lambda$$

de donde

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H(x_k)(x_k - x^*)\| &\leq \|x_k - x^*\| \int_0^1 \|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\| d\lambda \\ &\leq \|x_k - x^*\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\|\} \\ &= \theta_k \|x_k - x^*\| \end{aligned} \quad (6.4)$$

siendo $\theta_k = \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\|\} > 0$ finito, pues H es continua, dado que $f \in C^2$.

De (6.3), se obtiene entonces

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \mu \theta_k \|x_k - x^*\|.$$

Como evidentemente $\mu \theta_k \rightarrow 0^+$, si $k \rightarrow \infty$, entonces la convergencia de $\{x_k\}$ a x^* es **superlineal**.

Esta convergencia puede ser cuadrática, en el caso que la matriz hessiana H es de Lipschitz, es decir, existe L tal que

$$\|H(u) - H(v)\| \leq L \|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces,

$$\|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\| \leq L \|\lambda(x_k - x^*)\|$$

y la desigualdad (6.4) puede ser recalculada:

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H(x_k)(x_k - x^*)\| &\leq \|x_k - x^*\| \int_0^1 \|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\| d\lambda \\
&\leq L\|x_k - x^*\| \int_0^1 \|\lambda(x_k - x^*)\| d\lambda \\
&= \frac{L}{2}\|x_k - x^*\|^2
\end{aligned}$$

Aplicando a (6.3),

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{\mu L}{2}\|x_k - x^*\|^2,$$

lo cual muestra que el método de Newton tiene, en este caso, convergencia **cuadrática**.

Algoritmo de Newton, para funciones de clase C^2

- [0] Sea $\varepsilon > 0, k = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$
- [1] Elegir d_k mediante $H_k d_k = -g_k$, donde $H_k = H(x_k)$ y $g_k = \nabla f(x_k)$.
- [2] Hacer $x_{k+1} = x_k + d_k$
- [3] Si $\|g_{k+1}\| \leq \varepsilon$, parar. Si no, hacer $k \leftarrow k + 1$ y volver a [1]

Método de Newton con paso

Como vimos antes, si H_k es definida positiva entonces $d_k = -H_k^{-1}g_k$ es dirección de descenso. Una modificación que ayuda a acelerar la convergencia es incorporar un paso en cada iteración. Esto es, reemplazar la etapa [2] por

- [2] Hacer $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, donde t_k resuelve el problema de minimización unidimensional:

$$\min f(x_k + t d_k), \quad t \geq 0$$

6.1.3. Método de paso (minimización unidimensional)

En general, en este tipo de métodos se debe realizar una minimización unidimensional en cada iteración. Es decir, tal como se dijo antes, resolver el problema

$$\begin{aligned}
(L) \quad &\min \varphi(\lambda) \\
&\lambda \in [0, \infty[
\end{aligned}$$

en que $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$. En ciertos casos, dependiendo de las propiedades de la función f , puede ser posible encontrar el mínimo unidimensional resolviendo directamente la ecuación $\varphi'(\alpha) = 0$, es decir la ecuación $\nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k = 0$, pero lo más frecuente es verse obligado a aproximar el mínimo numéricamente mediante algún procedimiento como el denominado "método de dicotomía", que exponemos a continuación.

Sunpongamos que se sabe que el mínimo de φ está en algún intervalo $[0, \bar{\lambda}_k]$. Esto puede ocurrir en casos en que se sabe que la función es **unimodal**, es decir, que posee un solo valor λ_k que resuelve (L). Una función unimodal es lo que se conoce como función estrictamente casi-convexa, definida a continuación.

Definición 6.1.2 Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, donde S es convexo. Entonces

- Una función f se dice **casi-convexa** si, para todo $x_1, x_2 \in S$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

- Una función f se dice **estrictamente casi-convexa** si, para todo $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \forall \lambda \in]0, 1[$$

Observación 6.1.3 Notemos que:

- Si la función f es casi convexa, entonces el conjunto de valores que minimiza f es un conjunto convexo.
- Es claro que si f es casi-convexa entonces φ también lo es. Más en general, φ hereda todas las propiedades de f .
- Si d_k es una dirección de descenso, entonces es claro que $\varphi'(0) < 0$. En efecto, se puede advertir que en el caso diferenciable: $\varphi'(\lambda) = \nabla f(x_k + \lambda d_k)^T d_k$. Entonces, evaluando en el cero, $\varphi'(0) = \nabla f(x_k)^T d_k = f'(x_k; d_k) < 0$.

Teorema 6.1.2 Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente casi-convexa, que tiene un mínimo global en el intervalo $[a, b]$, entonces para $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$ tales que $\alpha_1 < \alpha_2$ se tiene:

$$i) \quad \varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\alpha) \geq \varphi(\alpha_2), \quad \alpha \in [a, \alpha_1[$$

$$ii) \quad \varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\alpha) \geq \varphi(\alpha_1), \quad \alpha \in]\alpha_2, b]$$

Demostración. Se deja propuesto como ejercicio. ■

Este teorema permite afirmar lo siguiente:

- a) $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$, entonces el nuevo intervalo de confianza para el mínimo es $[\alpha_1, b]$.
- b) $\varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2)$, entonces el nuevo intervalo de confianza para el mínimo es $[a, \alpha_2]$.

Usando estas propiedades se puede proponer el método de búsqueda unidimensional que describimos a continuación.

Método de dicotomía

Consideremos el problema,

$$(L) \quad \begin{array}{l} \text{mín } \varphi(t) \\ t \in [a, b] \end{array}$$

donde φ es unimodal.

- [0] Sean $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ (precisión), $j = 1$, $[a_1, b_1]$ intervalo inicial (por ejemplo, puede ser $a_1 = a$, $b_1 = b$).
- [1] Si $b_j - a_j < \rho$, detenerse y estimar la solución de (L) mediante $t_k = (a_j + b_j)/2$. El error máximo de esa aproximación es $\rho/2$.

Si $b_j - a_j \geq \rho$, sean

- $\alpha_1 = \frac{a_j + b_j}{2} - \varepsilon$
- $\alpha_2 = \frac{a_j + b_j}{2} + \varepsilon$

- [2] Si $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$ hacer $a_{j+1} = \alpha_1$ y $b_{j+1} = b_j$
 Si $\varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2)$ hacer $a_{j+1} = a_j$ y $b_{j+1} = \alpha_2$

- [3] $j \leftarrow j + 1$ y volver a [1]

Observación 6.1.4 Como ejercicio, probar que este método requiere que $\varepsilon < \rho/2$ y también probar que este procedimiento de determinación de paso produce una secuencia anidada de intervalos cerrados, tal que

$$b_{j+1} - a_{j+1} = \frac{1}{2^j}(b_1 - a_1) + 2\varepsilon(1 - \frac{1}{2^j}),$$

que converge a un punto que es solución de (L) .

Este procedimiento de minimización unidimensional es muy rápido, pero está limitado a casos en que la función es unimodal. En general, la minimización de funciones de una variable es un problema no trivial, especialmente si no se conoce alguna propiedad general de la función.

Siguiendo con el caso unimodal, resta por saber cómo determinar un intervalo inicial $[a, b]$ para partir este método, en el caso de la función $\varphi(t) = f(x_k + td_k)$. Sobre la base que $\varphi'(0) < 0$ y que existe un punto que minimiza φ en $[0, \infty[$, se puede aplicar el procedimiento simple siguiente:

[0] Sea $h > 0$.

Si $\varphi(0) < \varphi(h)$ elegir $[a, b] = [0, h]$.

Si no, ir a [1].

[1] Buscar p talque $\varphi(0) \geq \varphi(h) \geq \dots \geq \varphi(p-1)h \geq \varphi(ph) < \varphi((p+1)h)$, entonces elegir

$$[a, b] = [(p-1)h, (p+1)h].$$

6.2. Optimización con restricciones

En esta sección expondremos de manera general y aplicable, tres métodos de optimización con restricciones y sus posibles extensiones. Se trata de los métodos del **gradiente proyectado**, de **direcciones admisibles** y de **penalización**.

6.2.1. Método del gradiente proyectado

Este método es una generalización del método del gradiente, al caso de un problema de función objetivo no lineal y restricciones lineales. Una extensión al caso de restricciones no lineales puede también ser propuesta, pero está fuera del alcance de este texto. La idea es la siguiente: a partir de un punto factible, es decir que satisface las restricciones que definen el poliedro factible, se propone la dirección del método del gradiente (la misma usada en el método correspondiente al caso sin restricciones). Si esta dirección es admisible entonces se determina un paso sobre ella, tal como en el método irrestricto. Si no, entonces se procede a proyectar esta dirección sobre la cara "más cercana" del poliedro y se elige esa nueva dirección como dirección de búsqueda unidimensional. Este método es también conocido como

método de Rosen y data de comienzos de la década de 1960.

Antes de describir formalmente este algoritmo, es necesario recordar algunos conceptos de álgebra lineal.

Definición 6.2.1 Una matriz $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se dice **matriz de proyección** si ella es simétrica e idempotente (es decir, satisface $P = P^T$ y $P = P^2$).

Algunas propiedades

Sea P una proyección. Entonces

- P es semidefinida positiva.
- Si P es invertible, entonces $P = I$ (esto significa que en general las proyecciones son no invertibles, a menos que se trate de la identidad).
- $I - P$ es una proyección.
- El conjunto $L = \{Px / x \in \mathbb{R}^n\}$ es ortogonal a $L^\perp = \{(I - P)x / x \in \mathbb{R}^n\}$ y $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$.

Consideremos entonces el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &Ax \leq b \\ &Ex = e \end{aligned}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $E \in \mathcal{M}_{l \times n}$. Este es un problema de optimización no lineal, pero el dominio o conjunto factible es un poliedro $\mathcal{P}$.

Si $\bar{x}$ es un punto factible de P , entonces definamos la descomposición de la matriz A de la manera siguiente (eventualmente reordenando filas):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \text{tal que } A_1 \bar{x} = b_1, \quad A_2 \bar{x} < b_2,$$

donde $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es la correspondiente descomposición del lado derecho de la inecuación. Se observa que esta descomposición permite identificar cuáles son las restricciones activas y las no activas.

La idea es entonces proyectar la dirección del método del gradiente sobre la cara "más cercana" del poliedro, definida por las restricciones activas. Sea entonces la matriz $M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$.

La proyección de $-\nabla f(\bar{x})$ sobre el núcleo de M es $d = -P\nabla f(\bar{x})$, donde

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$$

Es un buen ejercicio demostrar que la proyección sobre el núcleo de M está dada por la matriz P , en el caso que el rango-filas de M es completo, es decir sus filas son linealmente independientes.

Observación 6.2.1 *Notar que una dirección es admisible para el sistema de inecuaciones $Ax \leq b$, $Ex = e$, si y sólo si satisface $A_1d \leq 0$ y $Ed = 0$. Para las restricciones inactivas, representadas por la matriz A_2 , cualquier dirección a partir de $\bar{x}$ es admisible, dado que $A_2d < b_2$.*

Lema 6.2.1 *La dirección definida por $d = -P\nabla f(\bar{x})$ es de descenso, en el sentido que $\nabla f(\bar{x})^T d \leq 0$, y es admisible, en el sentido que $A_1d \leq 0$ y $Ed = 0$.*

Demostración. La dirección definida cumple:

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &= -\nabla f(\bar{x})^T P \nabla f(\bar{x}) \\ &= -\nabla f(\bar{x})^T P^T P \nabla f(\bar{x}) \\ &= -\|P \nabla f(\bar{x})\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que $MP = 0$ (demostrarlo) y entonces se cumple que: $Md = -MP\nabla f(\bar{x}) = 0$, de donde $A_1d = 0$ y $Ed = 0$. ■

El siguiente teorema justifica que proyectar la dirección del método del gradiente es una buena elección en el caso de restricciones lineales, en el sentido que eso permite deducir una dirección admisible y de descenso, así como inducir un criterio de detención.

Teorema 6.2.1 *Consideremos el problema*

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } f(x) \\ & Ax \leq b \\ & Ex = e \end{aligned}$$

y sea $\bar{x}$ un punto factible. Sea la descomposición

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \text{ tal que } A_1 \bar{x} = b_1, \quad A_2 \bar{x} < b_2.$$

Si la matriz $M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$ tiene rango-filas completo y $P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$, sea

$$w = -(MM^T)^{-1}M\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Se cumple que:

- Si $d = -P\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $u \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es un punto de Karush-Kuhn-Tucker.
- Si $d = -P\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $u \not\geq 0$, entonces sea u_j una componente estrictamente negativa del subvector u y redefinamos la matriz $\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ E \end{bmatrix}$, en que $\bar{A}_1$ resulta de eliminar la fila j de A_1 . Redefiniendo $\bar{P} = I - \bar{M}^T(\bar{M}\bar{M}^T)^{-1}\bar{M}$ se tiene que $\bar{d} = -\bar{P}\nabla f(\bar{x})$ es una dirección admisible y de descenso.

Demostración. En el caso $u \geq 0$, si $d = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= -P\nabla f(\bar{x}) \\ &= \nabla f(\bar{x}) - M^T(MM^T)^{-1}M\nabla f(\bar{x}) \\ &= \nabla f(\bar{x}) + M^T w \\ &= \nabla f(\bar{x}) + [A_1^T, E^T] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \nabla f(\bar{x}) + A_1^T u + E^T v, \end{aligned}$$

y es claro que esta es la condición de Karush-Kuhn-Tucker.

Veamos ahora el caso $u \not\geq 0$. Elijamos una coordenada $u_j < 0$ y definamos $\bar{d} = -\bar{P}\nabla f(\bar{x})$, suponiendo que es igual a cero. Entonces, como antes, se puede escribir

$$0 = \nabla f(\bar{x}) + \bar{M}^T \bar{w},$$

donde $\bar{w} = -(\bar{M}\bar{M}^T)^{-1}\nabla f(\bar{x})$. También, por hipótesis, tenemos que

$$0 = \nabla f(\bar{x}) + M^T w,$$

luego

$$\begin{aligned}\bar{M}^T \bar{w} &= M^T w \\ &= A_1^T u + E^T v \\ &= \bar{A}_1^T \tilde{u} + E^T v + u_j a_j^T\end{aligned}$$

siendo a_j la fila j de A_1 y $\tilde{u} = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \neq j}$

Así, tenemos que $\bar{M}^T \bar{w} = \bar{M}^T \tilde{w} + u_j a_j^T$, donde $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ v \end{pmatrix}$. De allí, obtenemos que

$$\bar{M}^T (\bar{w} - \tilde{w}) - u_j a_j^T = 0$$

El lado izquierdo de esta expresión es una combinación lineal de las filas de M , en que al menos un ponderador es no nulo, puesto que $u_j < 0$.

Esto contradice que M tenga rango-filas completo, por lo tanto $\bar{d} = -\bar{P} \nabla f(\bar{x}) \neq 0$ y, por el lema anterior, $\bar{d}$ es dirección de descenso.

Veremos ahora que $\bar{d}$ es dirección admisible, es decir que se cumple $A_1 \bar{d} \leq 0$ y $E \bar{d} = 0$. Eventualmente reordenando filas, se tiene que

$$M \bar{d} = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix} \bar{d} = \begin{pmatrix} A_1 \bar{d} \\ E \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \bar{d} \\ a_j \bar{d} \\ E \bar{d} \end{pmatrix}$$

Pero, es claro que $\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \bar{d} \\ E \bar{d} \end{pmatrix} = \bar{M} \bar{d} = -\bar{M} \bar{P} \nabla f(\bar{x}) = 0$, puesto que $\bar{M} \bar{P} = 0$. Entonces se tiene que

$$M \bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_j \bar{d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, en particular, $\bar{A}_1 \bar{d} = 0$, $E \bar{d} = 0$. Luego, para probar que $A_1 \bar{d} \leq 0$, basta probar $a_j \bar{d} \leq 0$. Para eso, retomemos

$$\begin{aligned}
0 &= P \nabla f(\bar{x}) \\
&= \nabla f(\bar{x}) + M^T w \\
&= \nabla f(\bar{x}) + \bar{M}^T \tilde{w} + u_j a_j^T \\
&= a_j \bar{P} \nabla f(\bar{x}) + a_j \bar{P} \bar{M}^T \tilde{w} + u_j a_j \bar{P} a_j^T \quad (\text{multiplicamos por } a_j \bar{P}) \\
&= a_j \bar{P} \nabla f(\bar{x}) + u_j a_j \bar{P} a_j^T \quad (\text{notamos que } \bar{M} \bar{P} = 0) \\
&= -a_j \bar{d} + u_j a_j \bar{P} a_j^T
\end{aligned}$$

Dado que $u_j \leq 0$ y $a_j \bar{P} a_j^T \geq 0$, entonces tenemos $a_j \bar{d} \leq 0$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Esquema del método del gradiente proyectado (Rosen)

(0) Sean $k = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax_0 \leq b$, $Ex_0 = e$.

(1) Sea la descomposición $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ tal que $A_1 x_k = b_1$, $A_2 x_k < b_2$ y definamos $M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$.

(2) Sean $P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$, $d_k = -P \nabla f(x_k)$
(si M es vacía, se usa $P = I$)

Si $d_k = 0$ y $P = I$, entonces parar (la solución en curso satisface KKT)

Si $d_k = 0$ y $P \neq I$, entonces ir a (3)

Si $d_k \neq 0$, ir a (4)

(3) Definir $w = -(MM^T)^{-1}M \nabla f(x_k) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Si $u \geq 0$, parar, pues la solución en curso satisface KKT .

Si $u \not\geq 0$, sea $u_j < 0$ (cualquiera) y redefinir M , eliminando la fila j . Ir a (2).

(4) Determinar el paso, resolviendo el problema de minimización unidimensional

$$\begin{aligned}
&\min f(x_k + \lambda d_k) \\
&\lambda \in [0, \bar{\lambda}]
\end{aligned}$$

donde $\bar{\lambda} = \sup\{\lambda / x_k + \lambda d_k \in \mathcal{P}\}$.

Sea λ_k la solución de este subproblema. Hacer:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad k \leftarrow k + 1 \quad \text{e ir a (1)}.$$

Observación 6.2.2 *El valor de $\bar{\lambda}$ puede ser calculado en forma explícita en el caso de restricciones lineales. En primer lugar notemos que dado que $Ex_k = e$ y que la dirección satisface $Ed_k = 0$, entonces $E(x_k + \lambda d_k) = e$, cualquiera que sea λ . Por lo tanto, solamente se debe determinar $\bar{\lambda} > 0$ que garantice $A(x_k + \lambda d_k) \leq b$, para todo $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$.*

Entonces, imponemos $\lambda Ad_k \leq b - Ax_k$, para todo $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, lo cual se escribe por coordenada de la manera siguiente:

$$\lambda (Ad_k)_i \leq (b - Ax_k)_i \quad i = 1, \dots, m, \quad \lambda \in [0, \bar{\lambda}].$$

Dado que el lado derecho es positivo, si $(Ad_k)_i \leq 0$ la desigualdad es trivialmente satisfecha. Esto significa que

$$\bar{\lambda} = \min \left\{ \frac{(b - Ax_k)_i}{(Ad_k)_i} / (Ad_k)_i > 0 \right\}.$$

Notar que este es esencialmente el criterio de salida de la base en el método Simplex. De hecho, si no existe $(Ad_k)_i > 0$, entonces se considera $\bar{\lambda} = +\infty$ y, si la dirección satisface $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$, el problema (P) es no acotado.

Observación 6.2.3 *Existen extensiones de este método al caso de restricciones no lineales, pero están fuera del marco de este curso. Ellas están basadas esencialmente en la aproximación local de primer orden de las restricciones activas en cada punto x_k .*

6.2.2. Método de direcciones admisibles

Esta es una familia de métodos, basados en la idea general de iterar desde un punto factible a otro siguiendo una dirección admisible y de descenso, y aplicando una búsqueda unidimensional sobre la variedad lineal definida por la dirección. De hecho, el método del gradiente proyectado puede ser considerado dentro de esta familia, con la particularidad que en ese caso el trazo lineal de búsqueda está contenido en una cara del poliedro.

Consideremos de nuevo el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &Ax \leq b \\ &Ex = e \end{aligned}$$

y un punto factible $\bar{x}$. Usando la misma notación de la sección anterior, recordemos que $\bar{d}$ es una dirección admisible si cumple $A_1\bar{d} \leq 0$ y $E\bar{d} = 0$. Además, es de descenso si $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} < 0$.

Una forma de determinar una dirección de búsqueda a partir de $\bar{x}$ es resolver el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\bar{x})^T d \\ & A_1 d \leq 0 \\ & E d = 0 \end{aligned}$$

que puede ser un problema no acotado, si $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Por esta razón se impone una cota a la dirección, dado que la norma de la solución no es relevante en el proceso de búsqueda unidimensional. Entonces, la dirección se determina mediante

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}) \quad \min \quad & \nabla f(\bar{x})^T d \\ & A_1 d \leq 0 \\ & E d = 0 \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Observación 6.2.4 *Notar que $(\mathcal{D})$ es un problema de Programación Lineal cuyo poliedro factible es acotado, lo cual implica que tiene solución finita. Además, dado que $d = 0$ es factible, la solución $\bar{d}$ de $(\mathcal{D})$ satisface $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} \leq 0$.*

Veamos qué ocurre si el óptimo $\bar{d}$ de este problema es tal que $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0$. Entonces es claro que no existe d tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ A_1 d &\leq 0 \\ E d &= 0 \\ -1 \leq d_j &\leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

lo cual dice que no existe d tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ A_1 d &\leq 0 \\ E d &= 0 \end{aligned}$$

(si existiese, bastaría normalizar la solución), es decir, no existe d tal que

$$\begin{aligned} -\nabla f(\bar{x})^T d &> 0 \\ \begin{bmatrix} A_1 \\ E \\ -E \end{bmatrix} d &\leq 0 \end{aligned}$$

y, por el teorema de Farkas, existen $u, v', v'' \geq 0$ tales que

$$[A_1^T, E^T, -E^T] \begin{pmatrix} u \\ v' \\ v'' \end{pmatrix} = -\nabla f(\bar{x}).$$

Haciendo $v = v' - v''$ se obtiene

$$\nabla f(\bar{x}) + A_1^T u + E^T v = 0, \quad u \geq 0$$

que corresponde a la ecuación de Karush-Kuhn-Tucker del problema (P) .

Inversamente, supongamos ahora que $\bar{x}$ es un punto de Karush-Kuhn-Tucker, es decir, existen $u \geq 0$ y v , tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + A_1^T u + E^T v = 0.$$

Entonces, usando el mismo razonamiento anterior, el sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ A_1 d &\leq 0 \\ E d &= 0 \end{aligned}$$

no tiene solución, lo que significa que el óptimo de $(\mathcal{D})$ satisface $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0$.

Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema 6.2.2 *Sea $\bar{x}$ un punto factible de (P) . Consideremos problema $(\mathcal{D})$, que permite encontrar una dirección admisible de descenso para el problema (P) . Entonces, $\bar{x}$ es punto de Karush-Kuhn-Tucker si y solamente si el óptimo $\bar{d}$ de $(\mathcal{D})$ satisface $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0$.*

Esquema del método de direcciones admisibles (Zoutendijk)

(0) Sean $\varepsilon > 0$, $k = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax_0 \leq b$, $Ex_0 = e$.

(1) Sea la descomposición $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ tal que $A_1 x_k = b_1$, $A_2 x_k < b_2$.

(2) Resolver el problema lineal

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_k) \quad &\text{mín } \nabla f(x_k)^T d \\ &A_1 d \leq 0 \\ &E d = 0 \\ &-1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

y sea d_k solución de $(\mathcal{D}_k)$.

Si $\|\nabla f(x_k)^T d_k\| < \varepsilon$, entonces parar.

Si no, ir a (3).

(3) Determinar el paso, resolviendo el problema de minimización unidimensional

$$\begin{aligned} & \min f(x_k + \lambda d_k) \\ & \lambda \in [0, \bar{\lambda}] \end{aligned}$$

$$\text{donde } \bar{\lambda} = \min \left\{ \frac{(b - Ax_k)_i}{(Ad_k)_i} / (Ad_k)_i > 0 \right\}.$$

Sea λ_k la solución de este subproblema. Hacer:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad k \leftarrow k + 1 \text{ e ir a (1).}$$

Observación 6.2.5 *Notar que el valor de $\bar{\lambda}$ podría ser igual a $+\infty$, en el caso en que $Ad_k \leq 0$. En esa situación, podría detectarse no acotamiento de (P) , si es que $f(x_k + \lambda d_k)$ es monótona decreciente con $\lambda \geq 0$.*

6.2.3. Método de penalización

En esta sección trabajaremos con el problema de optimización con restricciones de igualdad (similar teoría puede hacerse si hay desigualdades). Consideremos entonces el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} & \min f(x) \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

La idea del método de penalización es resolver una secuencia de problemas de optimización irrestricta, aproximando así de manera sucesiva, la solución del problema (P) . Sea entonces el problema

$$(P_\mu) \quad \min f(x) + \mu \sum_{j=1}^l h_j(x)^2$$

donde $\mu > 0$ es una constante arbitraria. De un punto de vista intuitivo, si μ es un valor relativamente grande, entonces la solución óptima de (P_μ) tenderá a satisfacer las restricciones de (P) . Se puede entonces interpretar el factor μ como un "pago o castigo" por insatisfacción de las restricciones.

Pero, cuando la constante μ es muy grande, pueden aparecer problemas de estabilidad numérica en la resolución del problema (P_μ) . Por esta razón se usa generar una sucesión creciente $\{\mu_k\}$, de manera de ir aproximando la solución de (P) iterativamente y usando la solución de un problema aproximado (P_{μ_k}) como punto de partida para la resolución del problema $(P_{\mu_{k+1}})$.

Veamos esto a través de un ejemplo:

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

El problema penalizado es

$$(P_{\mu_k}) \quad \min x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mu_k [(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2]$$

donde usamos la secuencia $\mu_k = 10^k$, para $k = 0, 1, 2, \dots$. Entonces, resolviendo este problema para diferentes valores de k , se encuentra la secuencia siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_0 = 1 & \implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ \mu_1 = 10 & \implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{10}{31}, \frac{10}{31}, \frac{10}{31}\right) \\ \mu_2 = 100 & \implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{100}{301}, \frac{100}{301}, \frac{100}{301}\right) \end{aligned}$$

En el límite, la secuencia tiende al óptimo de (P) , que es $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

El caso anterior corresponde a lo que se denomina penalización cuadrática, pero la noción de función de penalización es más general.

Definición 6.2.2 Una función continua $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ se dice **función de penalización** si satisface la propiedad:

$$\begin{aligned} y = 0 & \implies \psi(y) = 0 \\ y \neq 0 & \implies \psi(y) > 0 \end{aligned}$$

Bajo ciertas hipótesis generales de regularidad, se puede demostrar la convergencia del método de penalización, en el sentido del teorema siguiente.

Teorema 6.2.3 *Consideremos el problema*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín } f(x) \\ h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, l \end{array}$$

y supongamos que es un problema factible.

Sea además $\alpha(x) = \sum_{j=1}^l \psi(h_j(x))$ y supongamos que, cualquiera que sea la sucesión real $\{\mu_k\}$ divergente a $+\infty$, el problema irrestricto

$$(P_k) \quad \begin{array}{ll} \text{mín } f(x) + \mu_k \alpha(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

tiene solución x_k y la sucesión $\{x_k\}$ es acotada.

Entonces

- $\mu_k \alpha(x_k) \longrightarrow 0$, si $\mu_k \longrightarrow +\infty$.
- *Cualquier punto de adherencia de $\{x_k\}$ (y existe al menos uno), es solución de (P).*

Esquema del método de penalización

(0) Sean $k = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mu_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, $\beta > 1$.

(1) Resolver

$$(P_k) \quad \begin{array}{ll} \text{mín } f(x) + \mu_k \alpha(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

usando x_k como punto de partida. Sea x_{k+1} solución de (P_k) .

(2) Si $\mu_k \alpha(x_{k+1}) < \varepsilon$, parar.

Si $\mu_k \alpha(x_{k+1}) \geq \varepsilon$, hacer $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$, $k \longleftarrow k + 1$ e ir a (1).