**MA3701 Optimización**. Semestre Otoño 2012
**Profesores:** Jorge Amaya, Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Ignacio Correa, Luis Fredes, Pedro Montealegre, Cesar Vigouroux.

# Control 1-PAUTA

**P1.** a) Llamemos $x_1$: cantidad de reactivo 1 en miles de libras, $x_2$: cantidad de reactivo 2 en miles de libras. Así el problema queda modelado de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}(PL)\quad & \max c^T x = x_1 + 3x_2\\ \text{s.a}\quad & x_1 + x_2 \leq 1\\ & x_1 \geq 0{,}2\\ & 3000x_1 + 9000x_2 \leq 6000 \iff x_1 + 3x_2 \leq 2\\ & x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Al gráficar se consigue lo siguiente:

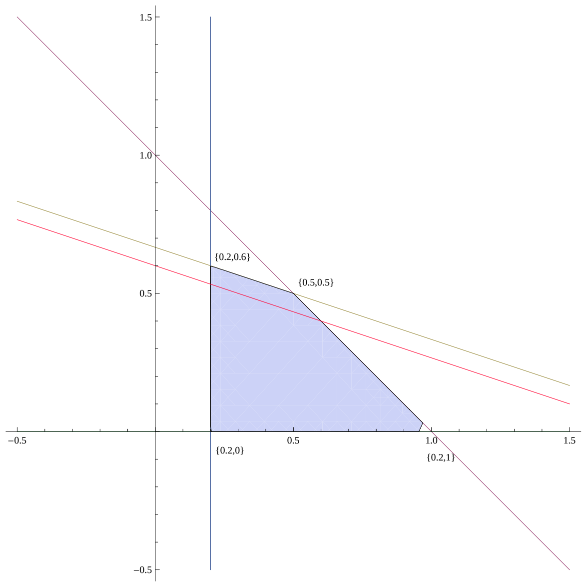


Figura 1: Gráfico $x_1$ vs $x_2$

La recta $c^t x = z$, con que representa a la función objetivo, aumenta el valor de $z$ al moverse en la dirección $(1, 3)$. Esta se muestra con una línea roja en el dibujo anterior. Dado que esta es paralela a la cara del poliedro representada por la ecuación $x_1 + 3x_2 = 2$, el conjunto solución resulta ser el segmento de esta cara que se ubica entre los puntos (0.2,0.6) y (0.5,0.5), es decir:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \exists\lambda \in [0, 1] :\ (x, y) = \lambda(0{,}2, 0{,}6) + (1 - \lambda)(0{,}5, 0{,}5)\}$$

Las preguntas planteadas se responden a continuación:

- La cantidad de litros de ácido producidos corresponde al valor óptimo del problema, en este caso igual 2 mil litros.
- Si se debe usar 600 libras del reactivo 2, seria recomendable usar 200 libras del reactivo 1.
- Como el conjunto solución esta contenido completamente en la recta que representa un gasto igual a 6000 dólares, ninguna solución es preferible a otra para este criterio.

b)

- $\Rightarrow$ Sean $\lambda \in [0,1], x_1, x_2 \in C$ tal que $x_1 \neq x$ y $x_2 \neq x$. Dado que $C$ es convexo se tiene que $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$. Además $y \neq x$ pues $x$ es punto extremo. Así $C \setminus \{x\}$ es convexo.
- $\Leftarrow$ Por contrarrecíproca. Si $x$ no es punto extremo, esto significa que $\exists \lambda \in [0,1]$ y $\exists x_1, x_2 \in C$ , tal que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ y además $x_1 \neq x$ y $x_2 \neq x$. Esto implica que $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$ y $x$ es una combinación convexa entre $x_1$ y $x_2$ que obviamente no esta en $C \setminus \{x\}$, por lo tanto $C \setminus \{x\}$ no es convexo.

**P2.** (a) Las variables básicas son: $x_3$, $x_2$, $x_5$.
Factibilidad: $\theta \geq 0$.
Optimalidad: $\gamma \leq 0$. Pero hay unicidad de la solución si: $\gamma < 0$.
Solución: $x^* = (0, 1, 4, 0, \theta)^T$

(b) No acotamiento: $\gamma > 0$ y $\alpha \leq 0$.
La dirección de no acotamiento es $d = (1, -\alpha, 1, 0, 0)^T$. Notar que es dirección, pues $Ad = 0$, $d \geq 0$.
En este caso el (sub)vector $e_j = (1, 0)^T$ corresponde a las coordenadas 1 y 4.
El (sub)vector $-B^{-1}a_j = (1, -\alpha, 0)^T$ corresponde a las coordenadas 3, 2 y 5.

(c) Optimalidad, pero no unicidad: $\gamma = 0$, $\alpha > 0$ y $\theta \geq 0$. Para llegar a otra base óptima, iteramos pivoteando sobre la primera columna (entra $x_1$ a la base) y la segunda fila (sale $x_2$ de la base). El nuevo cuadro es:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ \hline 0 & 1/\alpha & 1 & 6-4/\alpha & 0 & 4+1/\alpha \\ 1 & 1/\alpha & 0 & -4/\alpha & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \theta \end{array}$$

La nueva solución (óptima) es: $x^{**} = (1/\alpha, 0, 4+1/\alpha, 0, \theta)^T$.
Si se itera de nuevo, para hacer ingresar $x_2$ a la base (única posibilidad que no desmejora la función objetivo), entonces sale $x_1$ y se vuelve a la solución anterior. Es decir, no hay otros puntos extremos óptimos, por lo tanto el conjunto solución $S$ es la envoltura convexa de estos dos puntos, o sea:

$$S = co\{(0,1,4,0,\theta)^T, (1/\alpha, 0, 4+1/\alpha, 0, \theta)^T\}$$

(d) Cuadro factible, no óptimo: $\theta \geq 0$, $\gamma > 0$ y $\alpha > 0$.
Al pivotear sobre la primera fila, segunda columna (única posibilidad) se tiene el nuevo cuadro:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & \gamma/\alpha & 0 & 2-4\gamma/\alpha & 0 & 10+\gamma/\alpha \\ \hline 0 & 1/\alpha & 1 & 6-4/\alpha & 0 & 4+1/\alpha \\ 1 & 1/\alpha & 0 & -4/\alpha & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \theta \end{array}$$

No se sabe si este cuadro es óptimo, pues no se conoce el signo de $2-4\gamma/\alpha$, pero se advierte que la función objetivo mejoró de -10 a $-(10+\gamma/\alpha)$.

(e) Si el cuadro es óptimo ($\theta \geq 0$, $\gamma \leq 0$), entonces el valor mínimo de la función objetivo es

$$-10 = c^T x^* = (1,1,1,1,-1) \cdot (0,1,4,0,\theta) = 5 - \theta,$$

de donde $\theta = 15$.

(f) Costos reducidos no básicos: $(\bar{c}_1, \bar{c}_4) = (-\gamma, 2)$, $\gamma \leq 0$.
Los costos básicos son $c_3$, $c_2$ y $c_5$, en ese orden. Entonces, de la formula $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ se deduce que

$$(-\gamma, 2) = (1,1) - (1,1,-1) \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ \alpha & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

de donde $-\gamma = 2 - \alpha$. Entonces
si $\gamma < 0 \Longrightarrow 0 < \alpha < 2$
si $\gamma = 0 \Longrightarrow \alpha = 2$