FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS. CAMBIO DE VARIABLE

Teorema

Si $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ es una variable aleatoria y $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una función medible, entonces $Y = g(X) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una variable aleatoria.

Demostración

$\forall B \in \mathcal{B},\ Y^{-1}(B) = (g(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}}) \in \mathcal{A}$

Por tanto, Y es medible y, puesto que está definida sobre un espacio de probabilidad es una variable aleatoria.

Nos planteamos el problema de obtener la distribución de probabilidad de Y a partir de la de X. En teoría, el problema se resuelve de forma inmediata mediante el siguiente teorema general.

Teorema general de Cambio de Variable

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria y $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una función medible. Sea $Y = g(X)$, entonces

- $\forall B \in \mathcal{B},\ \mathrm{P}_Y(B) = P_X(g^{-1}(B))$
- $\forall y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = P_X(g^{-1}((-\infty, y]))$

Demostración

- $P_Y(B) = P[Y^{-1}(B)] = P[X^{-1}(g^{-1}(B))] = P_X(g^{-1}(B))$
- $F_Y(y) = P_Y((-\infty, y]) = P_X(g^{-1}((-\infty, y]))$

Pero en la práctica trabajaremos con variables discretas o continuas, o sea, con funciones masa de probabilidad o funciones de densidad. Nos interesa, por tanto, especificar las fórmulas de cambio de variable para tales casos.

CAMBIO DE VARIABLE DISCRETO

Teorema

Si $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria discreta, $P(\{X \in E_X\}) = 1$ y $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una función medible, entonces $Y = g(X)$ es discreta con valores en $g(E_X)$ y

$$P\{Y = y\} = \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap E_X} P\{X = x\}, \quad \forall y \in g(E_X)$$

Demostración

- $g(E_X)$ es numerable y $P\{Y \in g(E_X)\} = P\{g(X) \in g(E_X)\} \geq P\{X \in E_X\} = 1$
- $\forall y \in g(E_X),\ P\{Y = y\} = P\{g(X) = y\} = P\{X \in g^{-1}(y)\} = \displaystyle\sum_{x \in g^{-1}(y) \cap E_X} P\{X = x\}$

EJEMPLOS

Ejemplo 1

Sea X una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad

$$P\{X=x\} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2\ldots \quad (\lambda > 0).$$

Calcular la distribución (función masa de probabilidad) de $Y = X^2$.

Ejemplo 2
Sea X una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad $P\{X = -2\} = 1/5$, $P\{X = -1\} = 1/6$, $P\{X = 0\} = 1/5$, $P\{X = 1\} = 1/15$, $P\{X = 2\} = 11/30$. Calcular la función masa de probabilidad de $Y = X^2 + 3$.

CAMBIO DE VARIABLE CONTINUO

Ejemplo 1
Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in (-1,1) \\ \\ 0 & x \notin (-1,1) \end{cases}$$

y $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una función medible definida como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Aquí analizaremos el caso de transformaciones que convierten una variable continua en discreta y el caso de transformaciones biunívocas de variables continuas (que transforman variables continuas en continuas).

<u>**Teorema de cambio de variable de continuo a discreto**</u>

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria continua con función de densidad f_X y sea $Y = g(X)$ una variable aleatoria discreta con valores en un conjunto numerable E_Y. Entonces,

$$\forall y \in E_Y, \quad P\{Y = y\} = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx$$

<u>Demostración</u>

$P\{Y = y\} = P\{g(X) = y\} = P\{X \in g^{-1}(y)\} = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx$

Ejemplo
Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y sea Y una variable aleatoria definida como

$$Y = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ 1/2 & X = 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases}$$

<u>Teorema de cambio de variable continuo a continuo</u>
Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria continua con valores en el intervalo (a, b) ($f_X > 0 \quad \Leftrightarrow x \in (a, b)$) y sea $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y estríctamente monótona (creciente o decreciente). Entonces $Y = g(X)$ es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in g((a, b)) \\ \\ 0 & y \notin g((a, b)) \end{cases}$$

EJEMPLOS

Ejemplo 1
Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de $Y = X^2$.

Ejemplo 2
Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X y función de distribución F_X. Calcular la función de densidad y la función de distribución de $Y = aX + b$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$.