Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor Rodrigo Assar
Auxs: Sergio Araneda & Felipe Campos
Otoño 2012

MA3403-4: PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA
AUXILIAR 7: VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

1. *Distribución Uniforme*
   Un segmento de largo L se corta en un punto al azar, con distribución uniforme. Con los trozos obtenidos se construye un rectángulo y se obtiene el área. Calcule la esperanza del área a obtener.
   Propio.

2. *Distribución Laplace*
   Una v.a. aleatoria tiene distribución Laplace o doble exponencial de parámetro λ, $\lambda > 0$ si su función de densidad está dada por $f(x) = Ce^{-\lambda|x|}$.
   a) Determine C para que f sea función de densidad.
   b) Muestre que para una v.a.X con distribución Laplace, $\mathbb{P}(|X| > t + s \mid |X| > t)$ no depende de t.

3. *Distribución Exponencial*
   Sean $X_1..X_n$ v.a. exponenciales, independientes idénticamente distribuidas (i.i.d) de parámetro λ. Calcule la esperanza de $X = min\{X_1..X_n\}$.

4. *Distribución Gamma*
   Una v.a. aleatoria Z tiene distribución Gamma de parámetros (α, β), $\alpha > 0$ $\beta > 0$ si su función de densidad está dada por $f(x) = \dfrac{\beta e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ $x \geq 0$, y $f(x) = 0$ $x < 0$.
   Donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}dy$.

   a) Encuentre la función generadora de momentos de la distribución exponencial y la función generadora de momentos de la distribución Gamma.
   Si dos distribuciones Tienen la misma función generadora de momentos, entonces las distribuciones son iguales. Para $Z = X_1 + .. + X_r$, en donde X_i son r variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y cada una con distribución exponencial con el mismo parámetro β, muestre que Z tiene una distribución Gamma con parámetros r y β.
   b) Muestre que si α es entero, entonces $\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq \alpha)$, donde Y es una v.a. poisson con parámetro $\lambda = x\beta$.
   c) Ahora supongamos que $\beta = 1$. Muestre que $\mathbb{E}(Z^k) = \dfrac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)}$ $k \geq 0$.
   Deduzca de acá la Esperanza y Varianza de la Gamma estandarizada.

Meyer, Capítulo 10, p220,p221,p229; Jacod, Protter Cap9 p63

5. *Distribución Normal*

   Sea Z con distribución normal (0,1). Muestre que:

   a) $\mathbb{E}(Z^r) = 0$ para cada entero positivo impar.

   b) $\mathbb{E}(Z^r) = \dfrac{2^{r/2}}{\pi^{1/2}}\Gamma(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2})$ para cada entero positivo par. Muestre que para una normal general aparece un término determinado por la varianza. ¿Cuál es?