Profesor Rodrigo Assar
Auxs: Sergio Araneda & Felipe Campos
Otoño 2012

MA3403-4: PAUTA CONTROL 1

1. a) *(1.5)* Considere una pluma que se deja caer desde una altura $h > 0$. Explique por qué en dicho caso tiene sentido un modelo probabilista.

   R: Muchos Factores no observables o no completamente determinados: viento, roce, superficie de contacto de la pluma, aceleración de gravedad g no necesariamente es constante si h es grande, etc. (1.5).

   b) *(1.5)* Explique, y dé un ejemplo, por qué se impone que una probabilidad de una unión disjunta es la suma de las probabilidades.

   R: Para que alguno de los dos eventos ocurra, tiene que ocurrir o uno u otro (no ambos a la vez, dado que su intersección es vacía). al medir la factibilidad de la unión, ésta debe coincidir con la suma de las ~~medidas de las probabilidades~~. (probabilidad) (1.0)
   Pensar en el ejemplo de una moneda que es lanzada al aire. Puede salir cara o sello, no ambas. Luego $\{C\} \cap \{S\} = \emptyset$. (0.5)

   c) *(1.5)* Considere el juego Racha, en que se eligen 10 números entre 20. Calcular la probabilidad de ganar Mansacue (10 aciertos) y la probabilidad de Malacue (0 aciertos). Compare ambos resultados y explíquelos.

   R: la probabilidad de mansacue es $1/\binom{20}{10}$. 1 en el numerador porque la elección de 10 números corresponde a 1 subconjunto de 10 elementos del total de números (el orden no importa). $\binom{20}{10}$ porque hay esta cantidad de maneras de elegir 10 n°s entre 20. Se asume que todas las combinaciones son equiprobables. (0.75)
   La probabilidad de Malacue es que salgan solo números que no se escogieron. Como son 20 números en total y 10 escogidos, el complemento también es un conjunto de 10 números. Luego la probabilidad de malacue y mansacue son iguales.(0.75)

   d) *(1.5)* Sean a, b, n, m enteros estrictamente positivos tales que $a - 1 \leq b$, $n \in \{1, \ldots, a\}$, $m \in \{1, \ldots, b\}$. En un arreglo en que el número de As y Bs es a y b respectivamente, cuántas corridas (rachas) de As pueden haber? Si el número de corridas de Bs es m, cuántas corridas de As pueden haber? Desarrolle ambas para $a = 3, b = 2, m = 2$, y en general.

   R: La Cantidad mínima de corridas de letras A es 1, la que ocurre cuando todas las letras A van juntas. Así, si se separan las A el número de corridas aumenta hasta separar todas las letras A en corridas de lago 1.
   Para que esto sea posible se requieren al menos $a-1$ letras B para separar. Como $b \geq a - 1$

po hipótesis del enunciado, se permite hacer a corridas.
Así, el nº de corridas va desde 1 a a. (0.5)
Con $a = 3\cdot$ y $b = 2$ se cumple $b \geq a - 1$, luego el nº de corridas es $\{1, 2, 3\}$. (0.2)
Número de corridas de B: m
veamos que , para que existan m corridas, deben existir al menos $m - 1$ corridas de A.
Graficamente:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 2 & & m-1 & \\ B..B & A..A & B..B & A..A & \cdots & A & B..B \\ 1 & & 2 & & & & m \end{array}$$

Así se separan las B en m corridas. Se pueden agregar hasta 2 corridas más, al inicio y final del dibujo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & m & & m+1 \\ A..A & B..B & A..A & B..B & A..A & \cdots & A & B..B & A..A \\ & 1 & & 2 & & & & m & \end{array}$$

Con esto, el número de corridas de A es $\{m - 1, m, m + 1\}$ (0.4)
Esto, desde luego, si hay suficientes A's para hacer esas rachas. Es decir, se depende de a. (0.2)
Para $a = 3$, $b = 2$, $m = 2$
Como $a = m + 1$ hay $\{m - 1, m, m + 1\}$ nº de rachas posibles.
En efecto, están los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} m - 1 = 1 & BAAAB \\ m = 2 & ABAAB \\ m + 1 = 3 & ABABA \end{array}$$

(0.2)

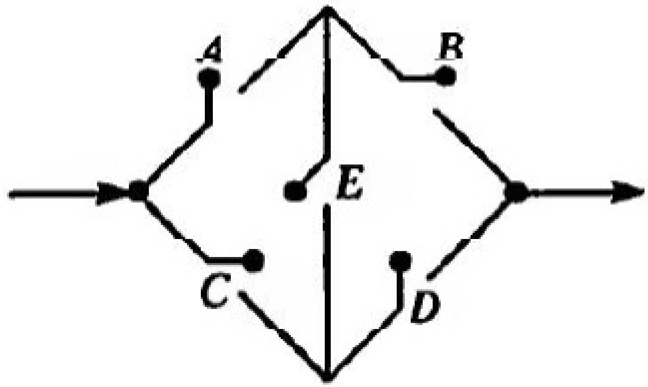

FIGURA 1. Circuito

2. *a)* *(2.0)* Considere el circuito eléctrico de la figura, en que la electricidad viene de input para salir por el output. Cada switch A, B, C, D, E es independiente y deja pasar (uno dice que está activo) electricidad con probabilidad p $(0 < p < 1)$. Cuál es la probabilidad que una señal eléctrica que parte en el input sea recibida en el output? Si la señal sí fue recibida en el output, cuál es la probabilidad (condicional) de que E estaba activo?

R: La probabilidad que haya señal es simplemente la probabilidad que haya un camino de arcos encendidos entre el input y el output. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}($ El Arco A está activado$)$, $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}($ La señal se recibe en el output. $)$
Condicionando respecto a E:

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(S|E^c)\mathbb{P}(E^c)$$

Si E no está activado, basta con que alguno de los dos caminos AB o CD esté activo. Luego $\mathbb{P}(S|E^c) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (C \cap D))$. Por fórmula de la unión, se tiene que $\mathbb{P}((A \cap B) \cup (C \cap D)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C \cap D) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (C \cap D))$. Por independencia de los circuitos, se concluye $\mathbb{P}(S|E^c) = p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4$.
Si E está activado, basta que entre A y C alguno de los dos esté activado; y entre B y D alguno de los dos esté activado. Luego $\mathbb{P}(S|E) = \mathbb{P}((A \cup B) \cap (C \cup D))$. Por independencia entre los arcos, el conjunto A, C es independiente de B, D (Esto sería preciso demostrar en detalle pero es más difícil), luego $\mathbb{P}((A \cup B) \cap (C \cup D)) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C \cup D)$. Usando fórmula de la unión e independencia en cada factor, se concluye $\mathbb{P}(S|E) = (p + p - p^2)^2 = (2p - p^2)^2$
Luego, en total se obtiene

$$\mathbb{P}(S) = (2p - p^2)^2 p + (2p^2 - p^4)(1 - p) = p^2(p(2 - p)^2 + (1 - p)(2 - p^2)$$

(1.5)
Por Bayes,

$$\mathbb{P}(E|S) = \mathbb{P}(S|E)\frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{(2p - p^2)^2 p}{p^2(p(2 - p)^2 + (1 - p)(2 - p^2))} = \frac{p(2 - p)^2}{p(2 - p)^2 + (1 - p)(2 - p^2)}$$

b) *(4.0)* Un grupo de científicos ha estimado los siguientes factores respecto a la ocurrencia de terremotos en Chile un año dado:

- La probabilidad que Salfate diga sí es 0,95. Si Salfate dice que habrá terremoto entonces habrá terremoto con probabilidad 0,5. Si dice que no, habrá terremoto con probabilidad 0,4.
- Un segundo factor es la temperatura de la superficie terrestre. Dado que dicha temperatura es mayor a 40 grados Celsius: la probabilidad de que Salfate diga sí habrá terremoto es 0,84, y la probabilidad (condicional también) que haya terremoto y Salfate diga sí es 0,6.

1) *(1.0)* Calcule $\mathbb{P}(T)$, la probabilidad de que haya terremoto.

R: T: Terremoto.
S sí: Salfate dice que si habrá terremoto.
S no $= (S \text{ sí})^c$.

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|S \text{ sí})\mathbb{P}(S \text{ sí}) + \mathbb{P}(T|S \text{ no})\mathbb{P}(S \text{ no})$$

Reemplazando por los valores correspondientes:

$$\mathbb{P}(T) = 0{,}5 \cdot 0{,}95 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}475 + 0{,}02 = 0{,}495$$

(1.0)

2) *(1.0)* Calcule la probabilidad que haya terremoto dado que Salfate dice sí y la temperatura es mayor que 40.

R: t°: la superficie está a más de 40 °C.
Por teo. multiplicación y definición de prob. condicional

$$\mathbb{P}(T \mid S \text{ sí} \cap t^{o}) = \mathbb{P}(T \cap S \text{ sí} \mid t^{o})\mathbb{P}(S \text{ sí} \mid t^{o})$$

(0.5)
Luego

$$\mathbb{P}(T \cap S \text{ sí} \mid t^{o})\mathbb{P}(S \text{ sí} \mid t^{o}) = 0,6 \cdot 0{,}84 = 0,714$$

(0.5)

3) *(2.0)* Suponga que para cada año la ocurrencia o no de un terremoto es independiente. Sea X la v.a. definida como la cantidad de años a esperar hasta que ocurra el terremoto. Explique por qué $\mathbb{P}(X = n) = (1 - \mathbb{P}(T))^{n-1}\mathbb{P}(T)$. Calcule e interprete

los valores de $\mathbb{P}(X = 3)$ y $\mathbb{P}(X \leq 3)$.

R: El primer factor corresponde a la probabilidad que no haya terremoto en un año (0.4). Para esperar n años es preciso que durante los primeros $n-1$ años no ocurran Terremotos. Por la independencia de estos eventos, se tiene el producto y la potencia respectiva (0.3). El segundo factor corresponde a la probabilidad que en el año n ocurra terremoto (0.3).

$$\mathbb{P}(X = 3) = (1 - \mathbb{P}(T))^2 \mathbb{P}(T) = 0{,}505^2 \cdot 0{,}435 \approx 0{,}125$$

(0.25)

Esta probabilidad corresponde a que justo en el tercer año hay un terremoto, y no antes. (0.25)

Como X es una v.a. discreta positiva, se tiene que

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{3} 0{,}505^{i-1} \cdot 0,495$$

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = 0{,}495 + 0{,}505 \cdot 0{,}495 + 0{,}505^2 \cdot 0{,}495 \approx 0{,}495 + 0{,}25 + 0{,}125 \approx 0{,}875$$

(0.25)

Esta probabilidad corresponde a que el terremoto ocurra antes o durante el tercer año. (0.25)

3. *a)* *(3.0)* En un examen de 20 preguntas cada una se responde V (verdadero) o F (falso). El alumno sabe que históricamente en el 75 % de los casos la respuesta correcta es V, por lo que (sin haber estudiado) decide responder el examen tirando 2 monedas y poner F si ambas salen cara y V si al menos una es sello.

   1) *(0.5)* Explique por qué $\mathbb{P}(X = i) = \binom{20}{i} 0{,}75^i (1 - 0{,}75)^{20-i}$ para X la v.a. que mide la cantidad de respuestas V que entrega el alumno.

   R: Primero notemos que el experimento con las monedas "simula"lo que pasa históricamente, pues: $\mathbb{P}(\text{2 caras}) = 1/2 \cdot 1/2 = 0{,}25$, y $\mathbb{P}(\text{algun sello}) = 1 - 1/4 = 0{,}75$. (Sin puntaje)
   Ahora $\mathbb{P}(X = i)$ es la probabilidad que el alumno diga i respuestas V.
   El conjunto de preguntas donde el alumno contesta V es un subconjunto de i elementos sobre 20 preguntas total. Luego hay $\binom{20}{i}$ formas distintas en que un alumno entregue i respuestas V. (0,1)
   Dado que el subconjunto de preguntas donde el alumno responde V, la probabilidad que tiene el evento correspondiente debería ser: probabilidad que en las i preguntas del

subconjunto el alumno responde V, en cada una es $0,75$ (0.05) , cada pregunta tiene probabilidad independiente, luego se multiplica i veces y de ahí la potencia. Para las otras $20-i$ preguntas, en cada una el alumno respondió F y su probabilidad es $1-0{,}75 = 0{,}25$. (0.05) y la potencia corresponde a la cantidad de preguntas respondidas F al igual que la parte anterior (todo el argumento exponentes 0,1).
Por principio multiplicativo, van todos los términos multiplicados (0,1).

2) *(1.0)* Exprese la probabilidad de que el alumno responda al menos 14 V.

R: Como X es v.a. discreta, puede tomar valores $14, 15, 16..,20$ (0.75).
Por la parte anterior $\mathbb{P}(X \leq 14) = \displaystyle\sum_{i=14}^{20} \binom{20}{i} (0{,}75)^i (0{,}25)^{20-i}$ (0.25).

3) *(1.5)* Calcule la probabilidad de 20 respuestas V. Interprete el resultado.

R: $\mathbb{P}(X = 20) = \binom{20}{20} 0{,}75^2 0 \cdot 0{,}25^{20-20} = 1 \cdot 0{,}75^{20} \cdot 1 = 0{,}75^{20}$ (1.0)
Son 20 preguntas en total, entonces es la multiplicación (independencia) de la probabilidad individual de cada V (no hay elecciones ni nada). (0.5)

b) *(3.0)* En un procedimiento de control de calidad en una empresa farmacéutica entre un total de 1000 productos se extrae una muestra de 10 de las cápsulas fabricadas, son testeadas y luego destruidas. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de cápsulas que no pasan el test (malas).

1) *(1.0)* Muestre que $\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{\binom{m}{i}\binom{1000-m}{10-i}}{\binom{1000}{10}}$ donde m $(0 \leq m \leq 1000)$ es el número total de cápsulas malas.

R: El término $\binom{m}{i}$ corresponde a las maneras de elegir i cápsulas malas entre las m malas totales. (0.25)
Se multiplica por el siguiente término debido al ppo. multiplicativo (0,1)
El segundo término $\binom{1000-m}{10-i}$ corresponde a las maneras de elegir las $10-i$ cápsulas que pasan el test, entre las $1000-m$ buenas totales. (0.25)
El denominador $\binom{1000}{10}$ corresponde a los casos totales. Son las maneras de elegir 10 cápsulas entre 1000 cápsulas.
Casos favorables / Casos totales , se tiene la expresión. (0.4)

2) *(1.0)* Suponga que el total de malas es 10. Calcule la probabilidad de que en éste proceso las 10 cápsulas seleccionadas estén malas. Interprete su resultado.

R: $\mathbb{P}(X = 10) = \dfrac{\binom{10}{10}\binom{1000-10}{10-10}}{\binom{1000}{10}} = \dfrac{1 \cdot 1}{\binom{1000}{10}} = \dfrac{1}{\binom{1000}{10}}$ (0.5)
Del total de selecciones de 10 cápsulas sobre 1000 (denominador), elegir 10 malas solo

tiene 1 caso favorable. De ahí la fracción resultante. (0.5)

3) *(1.0)* Suponga que el total de malas es 10. Calcule e interprete $\mathbb{P}(X = 5)$.

R: $\mathbb{P}(X = 5) = \dfrac{\binom{10}{5}\binom{990}{5}}{\binom{1000}{10}}$ Interpretaciones como en 1) (0.5)

$\mathbb{P}(X = 5) = \dfrac{10!}{5!5!} \cdot \dfrac{990!}{5!905!} \cdot \dfrac{990!10!}{1000!}$ Hasta aquí basta (0.5)