



PAUTA EXAMEN

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

3. Sea X una v.a. con valores en $[0, 1]$ y densidad $p_\theta(x)$, $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Se sabe que

$$p_{\theta_0}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{y} \quad p_{\theta_1}(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

(a) (3p) Desarrolle el test de Neymann-Pearson de nivel $\alpha = 0.1$ para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ en base a una muestra de tamaño $n = 1$.

Sol.: El test de Neyman-Pearson de nivel α tiene región crítica dada por,

$$R = \{x \in \mathcal{X} | p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x) \geq k_\alpha\},$$

donde k_α es una constante por determinar.

La desigualdad para el cociente de verosimilitudes se escribe como

$$\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)} = 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \geq k_\alpha.$$

Para determinar k_α , notemos que bajo H_0 , X se distribuye como una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. Entonces

$$P_{\theta_0}(R) = P_{\theta_0}(4X^3 \geq k_\alpha) = P_{\theta_0}(X \geq \sqrt[3]{k_\alpha/4}) = 1 - \sqrt[3]{k_\alpha/4}.$$

Si queremos que el test tenga nivel α , resolvemos la ecuación

$$1 - \sqrt[3]{k_\alpha/4} = \alpha,$$

cuya solución es

$$k_\alpha = 4(1 - \alpha)^3 = 2.9160.$$

Así, la región crítica resultante es

$$R = \{x \in \mathcal{X} | 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \geq 2.9160\} \quad (1)$$

$$\text{o también, } R = \{x \in \mathcal{X} | x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \geq 0.9\}. \quad (2)$$

(b) (1.5p) Calcule la potencia del test resultante.

Sol.: La función de potencia es

$$P_{\theta_1}(R) = P_{\theta_1}(X \geq 0.9) = \int_{0.9}^1 4x^3 dx = 1^4 - (0.9)^4 = 1 - 0.6561 = 0.3439.$$

Observación: En la sección de Gouet, la función de potencia es $P_\theta(R)$ cuando θ está en el espacio de parámetros dada por la hipótesis alternativa y la respuesta anterior es suficiente. Si consideramos la función de potencia como $P_\theta(R)$ con θ en el espacio de parámetros, entonces hay que notar que $P_{\theta_0}(R) = \alpha$.

(c) (1.5p) Aplique el test a la muestra $x_1 = 0.92$.

Sol.: Dado que $x_1 \in [0, 1]$ y que

$$4x_1^3 = 3.1148 \geq 2.9160,$$

entonces rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación $\alpha = 0.1$. También se puede argumentar considerando la región de rechazo dada por (2), y decir que $0.92 \geq 0.9$.

Tiempo: 3 horas.



EXAMEN

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

1. 1) Sea X una va con densidad $f(x) = e^{-(x-\beta)} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(x)$, donde β es un parámetro desconocido.

(a) (1.5p) Calcule la función generadora de momentos de X , es decir $\psi(t) = E(e^{tX})$.

Solución:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_{\beta}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\beta)} dx \\ &= \int_{\beta}^{\infty} e^{x(t-1)} e^{\beta} dx \\ &= e^{\beta} \left[\frac{e^{x(t-1)}}{t-1} \right]_{\beta}^{\infty} \\ &= \frac{e^{t\beta}}{1-t}, \quad t < 1.\end{aligned}$$

Esta función es dos veces diferenciable en $t = 0$, por lo que no hay problemas al calcular sus derivadas.

(b) (1.5p) Calcule la esperanza y la varianza de X .

Solución:

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= \left[\frac{\beta e^{\beta t}}{1-t} + \frac{e^{\beta t}}{(1-t)^2} \right]_{t=0} = \beta + 1 \\ \psi''(0) &= \left[\frac{\beta^2 e^{\beta t}}{1-t} + \frac{2\beta e^{\beta t}}{(1-t)^2} + \frac{2e^{\beta t}}{(1-t)^3} \right]_{t=0} = \beta^2 + 2\beta + 2\end{aligned}$$

Utilizando la función generadora de momentos se tiene $E(X) = \psi'(0) = \beta + 1$ y $E(X^2) = \psi''(0) = \beta^2 + 2\beta + 2$, de donde $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$.

Considere una MAS X_1, \dots, X_n del modelo paramétrico anterior.

(c) (1.5p) Calcule el EMV $\hat{\beta}$ de β .

Solución:

La función de verosimilitud está dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{\sum_{i=1}^n (\beta - x_i)} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \in [\beta, \infty)\}} = e^{\sum_{i=1}^n x_i - n\beta} \mathbb{1}_{\{\min\{x_i\} \in [\beta, \infty)\}}.$$

Esta función de β se maximiza para $\hat{\beta}_{MV} = \min\{x_i\}$.

- (d) (1.5p) Muestre que $\hat{\beta}$ es sesgado pero que el sesgo tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Solución:

Para calcular el sesgo es necesario calcular la esperanza de $\hat{\beta}_{MV}$. Para esto, utilizando independencia en la muestra se tiene

$$1 - F_{\hat{\beta}_{MV}}(a) = \mathbb{P}(\hat{\beta}_{MV} \geq a) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(x_i \geq a) = (1 - F(a))^n$$

Luego, la densidad para el estimador está dada por $f_{\hat{\beta}_{MV}}(a) = n(1 - F(a))^{n-1}f(a)$.

Desarrollando esta expresión se obtiene que $f_{\hat{\beta}_{MV}}(a) = ne^{n(\beta-a)}\mathbb{1}_{\{a \geq \beta\}}$. Ahora, utilizando esto para encontrar la esperanza se tiene:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_{MV}) = \int_{\beta}^{\infty} a n e^{n(\beta-a)} da = n e^{n\beta} \int_{\beta}^{\infty} a e^{-an} da = \beta - \frac{1}{n}$$

Este estimado es sesgado, pues su esperanza no es igual al parámetro β . Sin embargo, cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito, el sesgo (que corresponde a $\frac{1}{n}$) tiende a cero.

2. 2) Una empresa de camiones sospecha que la duración de ciertos neumáticos es de menos de 32000 km. Para verificar esta afirmación, la empresa instala 30 de esos neumáticos en sus camiones y obtiene una duración media de 31460 km. Se sabe que la desviación standard de la duración de los neumáticos es $\sigma = 900$ km y que las observaciones corresponden a una MAS X_1, \dots, X_n ($n = 30$) de una normal $N(\mu, \sigma^2)$.

- (a) (4p) Muestre que la región crítica del TRV de nivel α (test de razón de verosimilitud) para el problema

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < \mu_0,$$

tiene la forma

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \leq k_{\alpha}\},$$

donde μ_0 es un valor conocido y

$$k_{\alpha} = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(\alpha).$$

Solución: El test de razón de verosimilitud está dado por la región de rechazo:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} f(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(x_1, \dots, x_n; \theta)} > k \right\}$$

$$\text{Además, } f(x_1, \dots, x_n; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2}$$

Luego,

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\{\mu < \mu_0\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu_0)^2}} = \sup_{\{\mu < \mu_0\}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 - (x_i - \mu_0)^2}$$

Desarrollando se obtiene,

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sup_{\{\mu < \mu_0\}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum [2x_i(\mu_0 - \mu) + \mu^2 - \mu_0^2]}$$

Esto equivale a resolver $\min_{\mu < \mu_0} (\mu - \mu_0)(\mu + \mu_0 - 2\bar{x})$. Dependiendo del valor de \bar{x} este mínimo se alcanza en \bar{x} , cuando $\bar{x} < \mu_0$, o bien en μ_0 cuando $\bar{x} \geq \mu_0$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{-\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} & \bar{x} < \mu_0 \\ 1 & \bar{x} \geq \mu_0 \end{cases}$$

Por lo tanto la región está dada por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} < \underbrace{-2 \ln k}_C \right\}$$

en donde la constante C se determina de manera tal que el error de tipo I sea igual a α . Bajo H_0 \bar{x} es normal de media μ_0 y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. Por lo tanto, $C = \Phi^{-1}(\alpha)$.

- (b) (2p) Aplique el test desarrollado en (a) a los datos del enunciado e indique si H_0 se acepta o se rechaza con un nivel $\alpha = 0.05$, sabiendo que $\Phi(-1.96) = 0.05$.

Solución: La región de rechazo está dada por:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \leq 32000 - \frac{900}{\sqrt{30}} 1.96\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \leq 31678, 1\}$$

Como $31460 < 31678$, se rechaza H_0 .

3. 3) Sea X una v.a. con valores en $[0, 1]$ y densidad $p_\theta(x)$, $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Se sabe que

$$p_{\theta_0}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{y} \quad p_{\theta_1}(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

- (a) (3p) Desarrolle el test de Neymann-Pearson de nivel $\alpha = 0.1$ para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ en base a una muestra de tamaño $n = 1$.
- (b) (1.5p) Calcule la potencia del test resultante.
- (c) (1.5p) Aplique el test a la muestra $x_1 = 0.92$.

Tiempo: 3 horas.