

CONTROL # 2

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

1. Considere una colonia de bacterias con población inicial n_0 . En cada generación la cantidad de bacterias puede multiplicarse por $\lambda > 1$, con probabilidad p , o dividirse por λ con probabilidad $1 - p$. La multiplicación o división de la población ocurre de manera independiente en cada período.

Considere la variable aleatoria X_n , que mide la población de bacterias en la generación n .

- (a) (1 pto.) Pruebe que X_n toma valores en el conjunto $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^n$. Es decir, $X_n = \lambda^{U_n} n_0$, donde U_n es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{-n, \dots, n\}$.

Solución: Lo probaremos por inducción en n .

Caso Base: La población inicial es $n_0 = \lambda^0 n_0$.

Paso inductivo: Supongamos que en el periodo n la población puede tomar valores en $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^n$.

Usando esta hipótesis e independencia en cada periodo, se tiene que en el periodo $n + 1$ hay dos casos posibles: Si la población se multiplica en λ , los resultados estarán en $\{\lambda^{k+1} n_0\}_{k=-n}^n$;

Si la población se divide, los resultados estarán en $\{\lambda^{k-1} n_0\}_{k=-n}^n$. Luego, para el período $n + 1$ los resultados estarán, en cualquier caso, en el conjunto $\{\lambda^k n_0\}_{k=-(n+1)}^{n+1}$.

Consideremos $Y = \lambda^{U_n} n_0$ en donde U_n es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{-n, \dots, n\}$. Los valores que toma Y están en $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^n$. Si además $\mathbb{P}(X_n = \lambda^k n_0) = \mathbb{P}(U_n = k)$, entonces las variables aleatorias X_n y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Defina las variables aleatorias R_n : “Cantidad de veces que la población se multiplicó” y L_n : “Cantidad de veces que la población se dividió”. Notar que $R_n + L_n = n$.

- (b) (2 ptos.) Encuentre la distribución de probabilidades de R_n y de L_n y exprese U_n en términos de R_n .

Solución: Notemos que la variable R_n puede ser vista como la cantidad de “éxitos” (la población se multiplicó) en un total de n intentos. Por lo tanto, la variable R_n sigue una distribución Binomial de parámetros n y p , $R_n \sim Bi(n, p)$.

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in 0, 1, \dots, n$$

Usando que $L_n = n - R_n$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(n - R_n = k) = \mathbb{P}(R_n = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1 - p)^k, \quad k \in 0, 1, \dots, n$$

Utilizando la igualdad de números combinatorios $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1 - p)^k, \quad k \in 0, 1, \dots, n$$

es decir, $L_n \sim Bi(n, 1 - p)$.

Podemos escribir la variable U_n en términos de L_n y R_n de acuerdo a la siguiente relación: $U_n = L_n - R_n$.

- (c) (3 ptos.) Encuentre $\mathbb{P}(U_n = k)$ y use este resultado para encontrar la distribución de probabilidades de X_n .

Solución: La suma de binomiales con el mismo parámetro p sigue una binomial. Este NO es el caso, pues $R_n \sim Bi(n, p)$ y $L_n \sim Bi(n, 1 - p)$.

Por lo tanto, usando la relación encontrada en la parte anterior, se calcula

$$\mathbb{P}(U_n = k) = \mathbb{P}(R_n - L_n = k) = \mathbb{P}(R_n - (n - R_n) = k) = \mathbb{P}\left(R_n = \frac{n+k}{2}\right).$$

Notemos que R_n toma valores en $\{0, 1, \dots, n\}$. Esto implica que si $\frac{n+k}{2} \notin \{0, 1, \dots, n\}$, entonces $\mathbb{P}(R_n = \frac{n+k}{2}) = 0$. Por otra parte, si $\frac{n+k}{2} = m \in \{0, 1, \dots, n\}$, entonces $\mathbb{P}(R_n = \frac{n+k}{2}) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$.

Esto lo podemos reescribir como:

$$\mathbb{P}\left(R_n = \frac{n+k}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n+k \text{ impar} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{n-\frac{n+k}{2}} & n+k \text{ par} \end{cases}$$

O bien, en una fórmula cerrada (aunque no hemos definido el valor de $\binom{n}{x}$ para $x \notin \mathbb{N}$, pero suponemos que $0 \cdot \binom{n}{x} = 0$):

$$\frac{1 + (-1)^{n+k}}{2} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{n-\frac{n+k}{2}}.$$

2. Sean X e Y son variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

- (a) (3 ptos.) Encuentre la función de densidad conjunta para las variables U y V . Es decir, la densidad del vector (U, V) .

Solución: Utilizaremos el Teorema de Cambio de Variables. Notemos que si $u(x, y) = xy$ y $v(x, y) = \frac{x}{y}$, se tiene que $x(u, v) = \sqrt{uv}$ y $y(u, v) = \sqrt{u/v}$. Sin embargo, se requiere que $x(u, v) \geq 1$ y que $y(u, v) \geq 1$. Esto nos entrega condiciones sobre las variables (u, v) , es decir, $uv \geq 1$ y $\frac{u}{v} \geq 1$. Por lo tanto, consideremos el conjunto $D = \{(u, v) : 1 \leq u, \frac{1}{u} \leq v \leq u\}$ y la transformación:

$$T : [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow D$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

Esta transformación es biyectiva.

- T es inyectiva: Supongamos que $T(x, y) = T(w, z)$. Entonces:

$$(1) \quad xy = wz \quad \wedge \quad (2) \quad \frac{x}{y} = \frac{w}{z}.$$

Como $x, y, z, w > 0$, despejando x de (1) y reemplazándolo en (2) se obtiene $y = z$, lo que implica en (1) que $x = w$. Luego, $(x, y) = (w, z)$.

- T sobreyectiva: Sea $(a, b) \in D$. Entonces, considerando $x = \sqrt{ab} \geq 1$ y $y = \sqrt{\frac{a}{b}} \geq 1$, se tiene que $T(x, y) = (a, b)$. Notar que esto no es cierto si no restringimos la llegada de T al conjunto D .

La transformación inversa de T es:

$$T^{-1} : D \rightarrow [1, \infty) \times [1, \infty)$$

$$(u, v) \rightarrow T^{-1}(u, v) = \left(\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{u/v}} \right)$$

Calculamos el módulo del determinante del Jacobiano de la transformación inversa:

$$|\det(J_{T^{-1}}(u, v))| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-1\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \end{array} \right| = \frac{1}{2v}$$

Consideremos un punto $(u, v) \in D$. Se tiene que:

$$f_{X,Y}(T_1^{-1}(u, v), T_2^{-1}(u, v)) |\det(J_{T^{-1}}(u, v))| = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2u^2v}$$

Luego, la densidad conjunta para el vector aleatorio (U, V) está dada por:

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2u^2v} & (u, v) \in D \\ 0 & (u, v) \notin D \end{cases}.$$

(b) (3 ptos.) Encuentre las densidades marginales para U y V .

Solución:

Consideremos $u \geq 1$. La densidad marginal de U es:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) dv = \int_{\frac{1}{u}}^u \frac{1}{2u^2v} dv = \frac{1}{2u^2} [\ln v] \Big|_{\frac{1}{u}}^u = \frac{1}{2u^2} [\ln u - \ln(1/u)] = \frac{\ln u}{u^2}$$

Consideremos $v > 0$. La densidad marginal de V es:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du = \int_{\max\{1/v, v\}}^{\infty} \frac{1}{2u^2v} du = \frac{1}{2v} \left[\frac{-1}{u} \right]_{\max\{1/v, v\}}^{\infty} = \frac{1}{2v \max\{1/v, v\}} = \frac{1}{\max\{2, 2v^2\}}.$$

3. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) (1.2 ptos) Encuentre las densidades marginales de X e Y . ¿Son X e Y variables independientes?

Solución:

Si $x \notin [0, 1]$, entonces $f_X(x) = 0$. Sea $x \in [0, 1]$. La densidad marginal de X es:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 + y^2) dy = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Si $y \notin [0, 1]$, entonces $f_Y(y) = 0$. Sea $y \in [0, 1]$. La densidad marginal de Y es:

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 + y^2) dx = \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}.$$

Si las variables fuesen independientes se debería cumplir que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Sin embargo,

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}\right) \neq \frac{3}{2}(x^2 + y^2).$$

Es decir, las variables no son independientes.

- (b) (1.2 pts) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|Y=y)$ y $f_{Y|X}(y|X=x)$.

Solución:

Nuevamente nos centraremos en el caso $x, y \in [0, 1]$, pues en otro caso vale cero.

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = 3 \frac{x^2 + y^2}{3y^2 + 1}.$$

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = 3 \frac{x^2 + y^2}{3x^2 + 1}.$$

- (c) (1.2 pts) Calcular $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2})$ y $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2} | Y \leq \frac{1}{2})$.

Solución:

Para calcular la probabilidad condicional utilizamos la parte anterior:

$$\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}) = \int 0^{1/2} 3 \frac{(1/2)^2 + y^2}{3(1/2)^2 + 1} dy = \frac{1}{2}.$$

Para calcular la otra probabilidad no se requiere usar densidades condicionales, simplemente probabilidades condicionales.

$$\mathbb{P}(X < \frac{1}{2} | Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})}{\mathbb{P}(Y \leq \frac{1}{2})} = \frac{1/8}{5/16} = \frac{2}{5}.$$

- (d) (1.2 pts) Encuentre $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$.

Solución:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 + \frac{x}{2} dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}.$$

Por simetría, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^4 + \frac{x^2}{2} dx = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

Por simetría, $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2)$.

Luego $\text{Var}(X) = \frac{7}{15} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 0,076$. Por simetría nuevamente, $\text{Var}(Y) = 0,076$.

De las dos partes siguientes responda **sólo** una

- (e) (1.2 pts) Encuentre $\text{Cov}(X, Y)$.

Solución:

Sea $Z = XY$ y consideremos $a \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq a) &= \mathbb{P}(XY \leq a) = \int_0^1 \int_0^{\min\{1, \frac{a}{y}\}} 3(x^2 + y^2) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=0}^{x=\min\{\frac{a}{y}, 1\}} dy \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \min\{\frac{a}{y}, 1\}^3 + y^2 \min\{\frac{a}{y}, 1\} \right) dy = \frac{3}{2} \int_0^a \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy + \frac{3}{2} \int_a^1 \left(\frac{a^3}{3y^3} + y^2 \frac{a}{y} \right) dy \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{a}{2} + \frac{a^3}{2} \right] + \left[\frac{a^3}{4} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) + \frac{3a}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \right].$$

Así,

$$\mathbb{P}(XY \leq a) = \frac{a}{2} + \frac{a^3}{2} + \frac{a}{4} - \frac{a^3}{4} + \frac{3a}{4} - \frac{3a^3}{4} = \frac{a}{2}(3 - a^2).$$

Luego, la densidad de $Z = XY$ está dada por $f_Z(a) = \frac{3}{2}(1 - a^2)$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{3}{2} \int_0^1 a(1 - a^2) da = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{4}.$$

Luego, $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{25}{64} = \frac{16-25}{64} = \frac{-9}{64}$.

(f) (1.2 ptos) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y = y)$.

Solución:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^1 x \cdot 3 \frac{x^2 + y^2}{3y^2 + 1} dx = \frac{1}{3y^2 + 1} \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{2} y^2 \right].$$