



CONTROL 1

14 de noviembre de 2011

Tiempo: 3 horas

P1. a) (2,0 ptos.) Sean E , F y G eventos. Muestre que

$$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(EF) - \mathbb{P}(EG) - \mathbb{P}(FG) + \mathbb{P}(EFG).$$

b) Una persona desea cruzar la frontera de un país llevando mercancía ilegal. En la aduana hay dos tipos de sondeos al equipaje: el sondeo regular, que se lleva a cabo el 75 % de las veces, y el sondeo exhaustivo, que se realiza el 25 % de las veces (el tipo de sondeo se escoge al azar con esas probabilidades). Si hay mercancía ilegal en el equipaje, el sondeo regular la encuentra con probabilidad de $1/10$, y el exhaustivo la encuentra con probabilidad $1/2$.

1) (1,5 ptos.) Muestre que la probabilidad de que no descubran a la persona es de $4/5$.

2) (1,5 ptos.) Si no la descubren, ¿cuál es la probabilidad de que le haya tocado el sondeo regular?

3) (1,0 pto.) Cuando se descubre a alguien con mercancía ilegal por primera vez, se le entrega un parte de cortesía, pero a la segunda vez se le aplica una multa. Si la persona pretende cruzar la frontera n veces, de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que no la multen?

P2. a) Una mano de poker consta de 5 cartas escogidas al azar del total de 52 que posee el mazo inglés. Calcule la probabilidad de obtener:

1) (1,0 pto.) Color: las 5 cartas son de la misma pinta.

2) (1,0 pto.) Dos pares: dos cartas tienen el mismo número, otras dos también poseen el mismo número, pero distinto al anterior, y la última tiene un número distinto al resto.

3) (1,0 pto.) Poker: cuatro cartas tienen el mismo número.

b) (3,0 ptos.) Dada una variable aleatoria no-negativa X , decimos que ella tiene la propiedad de *pérdida de memoria* si $\forall t, s > 0$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Muestre que las variables aleatorias geométrica y exponencial poseen pérdida de memoria. *Indicación:* calcule primero $\mathbb{P}(X > s)$ para cada caso; note también que para la variable geométrica basta trabajar con $s, t \in \{1, 2, \dots\}$.

P3. a) (3,0 ptos.) Se tiene una urna con n bolitas numeradas de 1 a n . Se extraen m bolitas al azar, sin reposición (suponga $1 \leq m \leq n$). Sea X la variable aleatoria correspondiente a la mayor bolita extraída. ¿Cuál es el rango de X ? Calcule la función distribución de X

b) Sea X una variable aleatoria con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ C - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde C es una constante.

1) (1,0 pto.) Muestre que $C = 1$.

2) (1,0 pto.) Calcule la función de distribución acumulada de X .

3) (1,0 pto.) Muestre que la variable aleatoria $Y = |X|$ es uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Indicación: calcule $F_Y(y)$; utilice el hecho que $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$.