



## CONTROL # 1

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

**P1.** Se deben repartir turnos de trabajo para  $2n$  trabajadores. Existen  $n$  turnos de noche y  $n$  turnos de día. De los  $2n$  trabajadores,  $0 < a < n$  prefieren de noche y  $0 < b < n$  prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

**P2.** Uno de los casinos recientemente inaugurados en el país propone un juego “secuencial” que consiste en apostar en máquinas tragamonedas que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad  $p > 0$  de entregar premio. El jugador tiene acceso a la primera máquina, donde juega, pudiendo ganar o perder. Si gana debe cobrar su premio e irse del casino pero si pierde debe jugar en la segunda máquina. Nuevamente, si gana cobra el premio y deja el casino pero si pierde continúa en la tercera máquina, en la cual gana o pierde y se se retira del casino. Considere los sucesos (eventos)  $G_i$  : “el jugador recibe el premio de la máquina  $i$ ”,  $i = 1, 2, 3$ .

i) (1.2 ptos.) Explique por qué los sucesos  $G_i$  son disjuntos y pruebe que

$$P(G_i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

ii) (1.2 ptos.) Calcule la probabilidad de que el jugador no gane.

iii) (1.2 ptos.) Averigüe si  $G_1, G_2$  y  $G_2, G_3$  son o no pares de sucesos independientes.

iv) (1.2 ptos.) Sabiendo que el jugador ha ganado, calcule la probabilidad de que el premio lo haya obtenido en la máquina  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

v) (1.2 ptos.) Suponga que en lugar de 3 máquinas hay infinitas máquinas funcionando como se describe arriba. Muestre que la probabilidad del suceso  $G$  : “ganar premio” es 1, expresando  $G$  en términos de los  $G_i, i = 1, 2, \dots$

**P3.** Una urna contiene cinco bolitas numeradas de 1 a 5. Suponga que se extraen dos bolitas al azar, una tras otra. Considere como espacio muestral el conjunto

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 5\}\}.$$

Se define la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  como  $X((i, j)) = i + j$

(a) Suponga que la extracción es **sin** reposición.

i) (1 pto.) Defina una probabilidad  $P$  sobre los subconjuntos de  $\Omega$  que refleje apropiadamente las condiciones del experimento. ¿Es equiprobable el espacio de probabilidad resultante?

ii) (0.5 ptos.) Determine el conjunto  $E$  de los valores que puede tomar  $X$ .

iii) (1.5 ptos.) Determine la probabilidad de que la variable  $X$  tome el valor  $k$ , con  $k \in E$ .

(b) Suponga que la extracción es **con** reposición.

iv) (1 pto.) Defina una probabilidad  $P$  sobre los subconjuntos de  $\Omega$  que refleje apropiadamente las condiciones del experimento. ¿Es equiprobable el espacio de probabilidad resultante?

v) (0.5 ptos.) Determine el conjunto  $E$  de los valores que puede tomar  $X$ .

vi) (1.5 ptos.) Determine la probabilidad de que la variable  $X$  tome el valor  $k$ , con  $k \in E$ .

Tiempo: 2 horas y 30 minutos