

CONTROL # 2

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

1. Considere una colonia de bacterias con población inicial n_0 . En cada generación la cantidad de bacterias puede multiplicarse por $\lambda > 1$, con probabilidad p , o dividirse por λ con probabilidad $1 - p$. La multiplicación o división de la población ocurre de manera independiente en cada período. Considere la variable aleatoria X_n , que mide la población de bacterias en la generación n .

- (a) (1 pto.) Pruebe que X_n toma valores en el conjunto $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^n$. Es decir, $X_n = \lambda^{U_n} n_0$, donde U_n es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{-n, \dots, n\}$.

Defina las variables aleatorias R_n : “Cantidad de veces que la población se multiplicó” y L_n : “Cantidad de veces que la población se dividió”. Notar que $R_n + L_n = n$.

- (b) (2 ptos.) Encuentre la distribución de probabilidades de R_n y de L_n y exprese U_n en términos de R_n .
- (c) (3 ptos.) Encuentre $\mathbb{P}(U_n = k)$ y use este resultado para encontrar la distribución de probabilidades de X_n .
2. Sean X e Y son variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

- (a) (3 ptos.) Encuentre la función de densidad conjunta para las variables U y V . Es decir, la densidad del vector (U, V) .
- (b) (3 ptos.) Encuentre las densidades marginales para U y V .
3. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) (1.2 ptos) Encuentre las densidades marginales de X e Y . ¿Son X e Y variables independientes?
- (b) (1.2 ptos) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|Y=y)$ y $f_{Y|X}(y|X=x)$.
- (c) (1.2 ptos) Calcular $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2})$ y $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2} | Y \leq \frac{1}{2})$.
- (d) (1.2 ptos) Encuentre $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$.

De las dos partes siguientes responda **sólo** una

- (e) (1.2 ptos) Encuentre $\text{Cov}(X, Y)$.
- (f) (1.2 ptos) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y=y)$.