

PAUTA CONTROL 2

- P1.** a) Sea X la hora de llegada a la clase, medida en minutos pasadas las 8:00, y sea Y la hora de llegada al paradero. Claramente X es una variable discreta que toma el valor 10 cuando alcanza el autobús de las 7:30, o bien 30 cuando alcanza el autobús de las 7:40, o bien 20 cuando toma el colectivo. Luego:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in R_X} k \mathbb{P}(X = k) = 10 \cdot \mathbb{P}(X = 10) + 30 \cdot \mathbb{P}(X = 30) + 20 \cdot \mathbb{P}(X = 20).$$

Sabemos que $X = 10$ cuando alcanza el autobús de las 7:30, es decir, cuando la hora de llegada al paradero es menor que 7:30, o sea, cuando $Y < 7:30$. Análogamente, $X = 30$ cuando $7:30 \leq Y < 7:40$, y también $X = 20$ cuando $7:40 \leq Y$. Teniendo en cuenta que Y es uniforme en el intervalo entre las 7:25 y las 7:45, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 10 \cdot \mathbb{P}(Y < 7:30) + 30 \cdot \mathbb{P}(7:30 \leq Y < 7:40) + 20 \cdot \mathbb{P}(7:40 \leq Y) \\ &= 10 \cdot \frac{5}{20} + 30 \cdot \frac{10}{20} + 20 \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{20}(50 + 300 + 100) = 450/20 = 22,5, \end{aligned}$$

es decir, la hora esperada de llegada es a las 8:22 con 30 segundos.

- b) Cuando han salido exactamente $k - 1$ bolitas distintas (es decir, cuando estamos en las extracciones correspondientes a X_k), la probabilidad de que en una extracción aparezca una bolita que no ha salido antes corresponde a la proporción de bolitas no vistas, es decir, $(N - (k - 1))/N$. Por lo tanto, se tiene que X_k es una variable geométrica de parámetro $p_k = (N - k + 1)/N$.

Como $X_k \sim \text{geom}(p_k)$, se tiene que $\mathbb{E}(X_k) = 1/p_k = N/(N - k + 1)$. Además, claramente se tiene que $X = X_1 + \dots + X_N$, pues deben acumularse las extracciones necesarias para que cada bolita salga al menos una vez. Por linealidad de la esperanza, tenemos entonces que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^N \frac{N}{N - k + 1} = N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

- P2.** a) Dado $t < 1/2$, calculemos:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} e^{tx} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx \\ &= \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} e^{-x(1-2t)/2} x^{n/2-1} dx. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $y = x(1 - 2t)/2$, obteniendo:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} e^{-y} [2y(1 - 2t)^{-1}]^{n/2-1} 2(1 - 2t)^{-1} dy \\ &= \frac{2^{n/2} (1 - 2t)^{-n/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{n/2-1} dy = \frac{(1 - 2t)^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} \Gamma(n/2) = (1 - 2t)^{-n/2}. \end{aligned}$$

- b) Derivemos la f.g.m.:

$$\begin{aligned} \frac{dM_X}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} (1 - 2t)^{-n/2} = -\frac{n}{2} (1 - 2t)^{-n/2-1} (-2) = n(1 - 2t)^{-n/2-1}, \\ \frac{d^2 M_X}{dt^2}(t) &= \frac{d}{dt} n(1 - 2t)^{-n/2-1} = n \left(-\frac{n}{2} - 1 \right) (1 - 2t)^{-n/2-2} (-2) = n(n + 2)(1 - 2t)^{-n/2-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la propiedad fundamental de la f.g.m., obtenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{dM_X}{dt}(0) = n(1-0)^{-n/2-1} = n,$$

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{d^2 M_X}{dt^2}(0) - n^2 = n(n+2)(1-0)^{-n/2-2} - n^2 = 2n.$$

- c) Calculemos la densidad de Y^2 , para lo cual partimos por su distribución acumulada. Para $y > 0$, tenemos:

$$F_{Y^2}(y) = \mathbb{P}(Y^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq Y \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-z^2/2} dz,$$

donde hemos usado la simetría del integrando. Derivando lo anterior con respecto a y , utilizando el TFC y la regla de la cadena, obtenemos la densidad de Y^2 :

$$f_{Y^2}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_{z=\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2}.$$

Lo anterior vale para $y > 0$, mientras que para $y \leq 0$ la distribución acumulada vale 0 (pues $Y^2 \geq 0$), y por lo tanto la densidad también es 0. Usando que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, obtenemos entonces:

$$f_{Y^2}(y) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} e^{-y/2} y^{1/2-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

es decir, $Y^2 \sim \chi_1^2$.

- d) Por el ítem anterior, cada X_k^2 posee distribución χ_1^2 , luego $M_{X_k^2}(t) = (1-2t)^{-1/2}$. Como la f.g.m. de la suma de variables independientes corresponde al producto de las f.g.m., se tiene entonces que la f.g.m. de $W = X_1^2 + \dots + X_n^2$ es

$$M_W(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k^2}(t) = \prod_{k=1}^n (1-2t)^{-1/2} = (1-2t)^{-n/2}.$$

Y recordando que la f.g.m. caracteriza la distribución de la variable, se concluye que necesariamente W se distribuye como una χ_n^2 , como deseábamos.

- P3.** a) 1) Se tiene que $(U, V) = g(X, Y)$, donde $g(x, y) = (x, x/y)$. El teorema del cambio de variables nos dice que

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) |\det(Dg^{-1}(u, v))|.$$

En nuestro caso es directo ver que g es su propia inversa, por lo cual $g^{-1}(u, v) = (u, u/v)$ y

$$Dg^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{bmatrix}$$

y luego $|\det(Dg^{-1}(u, v))| = |u|/v^2$. Como X e Y son normales estándar independientes, su densidad conjunta es el producto de las densidades marginales, es decir, $(1/2\pi)e^{-(x^2+y^2)/2}$. Reemplazando todo esto en la fórmula que entrega el teorema, obtenemos:

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{|u|}{v^2} \frac{e^{-(u^2+(u/v)^2)/2}}{2\pi} = \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$

- 2) Calculemos la densidad marginal de V :

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2} du = \frac{1}{2\pi v^2} 2 \int_0^{\infty} ue^{-u^2(1+1/v^2)/2} du,$$

donde la última igualdad se debe a la simetría en u . Hacemos el cambio de variable $w = u\sqrt{1 + 1/v^2}$ y de lo anterior se obtiene

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{we^{-w^2/2}}{\sqrt{1 + 1/v^2}} \frac{dw}{\sqrt{1 + 1/v^2}} = \frac{1}{\pi(1 + v^2)} \int_0^\infty we^{-w^2/2} dw = \frac{1}{\pi(1 + v^2)},$$

donde la integral vale 1, pues corresponde a $-e^{-w^2/2}$ evaluado en 0 e ∞ . Luego, V es una variable con distribución de Cauchy.

- b) 1) Sea T la duración de la falla. Condicionando en los resultados de T , tenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty \mathbb{E}(X|T = t)f_T(t)dt = \int_0^\infty \mathbb{E}(X|T = t)\lambda e^{-\lambda t}dt,$$

donde hemos usado que $T \sim \exp(\lambda)$. En el evento $T = t$, sabemos que X es una variable de Poisson de parámetro μt , por lo cual su esperanza es exactamente μt . Integrando por partes, tenemos entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mu t \lambda e^{-\lambda t} dt = \mu \left(-te^{-\lambda t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \right) = \mu(0 + 1/\lambda) = \mu/\lambda.$$

- 2) Por la regla de probabilidades totales (versión continua), condicionando en los resultados de T tenemos:

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(X = k|T = t)f_T(t)dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X = k|T = t)\lambda e^{-\lambda t}dt.$$

Utilizando nuevamente que $X \sim \text{Poisson}(\mu t)$ cuando se condiciona en $T = t$, sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\mu^k \lambda}{(\lambda + \mu)^{k+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)t} [(\lambda + \mu)t]^{(k+1)-1}}{\Gamma(k+1)} dt, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\Gamma(k+1) = k!$. La integral anterior vale 1 pues el integrando corresponde a la densidad de una variable Gamma($k+1, \lambda + \mu$), por lo tanto:

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right).$$

Luego, $\mathbb{P}(X + 1 = k) = \mathbb{P}(X = k - 1) = (1 - p)^{k-1}p$, donde $p = \lambda/(\lambda + \mu)$; es decir, $X + 1 \sim \text{geom}(p)$. En particular,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X + 1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - 1 = \mu/\lambda.$$