



EXAMEN

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

1. 1) Sea X una va con densidad $f(x) = e^{-(x-\beta)} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(x)$, donde β es un parámetro desconocido.
- (a) (1.5p) Calcule la función generadora de momentos de X , es decir $\psi(t) = E(e^{tX})$.
 - (b) (1.5p) Calcule la esperanza y la varianza de X . Considere una MAS X_1, \dots, X_n del modelo paramétrico anterior.
 - (c) (1.5p) Calcule el EMV $\hat{\beta}$ de β .
 - (d) (1.5p) Muestre que $\hat{\beta}$ es sesgado pero que el sesgo tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.
2. 2) Una empresa de camiones sospecha que la duración de ciertos neumáticos es de menos de 32000 km. Para verificar esta afirmación, la empresa instala 30 de esos neumáticos en sus camiones y obtiene una duración media de 31460 km. Se sabe que la desviación standard de la duración de los neumáticos es $\sigma = 900$ km y que las observaciones corresponden a una MAS X_1, \dots, X_n ($n = 30$) de una normal $N(\mu, \sigma^2)$.

- (a) (4p) Muestre que la región crítica del TRV de nivel α (test de razón de verosimilitud) para el problema

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < \mu_0,$$

tiene la forma

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \leq k_\alpha\},$$

donde μ_0 es un valor conocido y

$$k_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(\alpha).$$

- (b) (2p) Aplique el test desarrollado en (a) a los datos del enunciado e indique si H_0 se acepta o se rechaza con un nivel $\alpha = 0.05$, sabiendo que $\Phi(-1.96) = 0.05$.
3. 3) Sea X una v.a. con valores en $[0, 1]$ y densidad $p_\theta(x)$, $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Se sabe que

$$p_{\theta_0}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{y} \quad p_{\theta_1}(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

- (a) (3p) Desarrolle el test de Neymann-Pearson de nivel $\alpha = 0.1$ para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ en base a una muestra de tamaño $n = 1$.
- (b) (1.5p) Calcule la potencia del test resultante.
- (c) (1.5p) Aplique el test a la muestra $x_1 = 0.92$.

Tiempo: 3 horas.