

Solución problema 4 Control 3

MA-3403 Prof. R. Gouet, 8/06/09

P4. Sea X_1, \dots, X_n una MAS del modelo uniforme sobre el intervalo $(0, \beta)$. Escribir un intervalo de confianza para β con nivel de confianza $1 - \alpha$. En particular, calcular un intervalo de confianza para $\alpha = 0.1$ si se obtiene la siguiente muestra de 4 elementos: 1.13, 0.67, 1.32, 0.27. Indicación: considere como pivote a la función $T(X, \beta) = \max\{X_1, \dots, X_n\}/\beta$.

Solución: T es una función pivote apropiada porque depende monótonamente del parámetro desconocido β y su distribución no depende de β . En efecto

$$P_\beta(\max\{X_1, \dots, X_n\}/\beta \leq t) = \prod_{i=1}^n P_\beta(X_i \leq \beta t) = F_\beta(\beta t)^n,$$

donde F_β designa la función de distribución de una va uniforme en $(0, \beta)$.

Por otra parte, resulta que

$$F_\beta(x) = \frac{x}{\beta} \mathbb{1}_{(0, \beta)}(x) + \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(x),$$

de manera que

$$F_\beta(\beta t) = \frac{\beta t}{\beta} \mathbb{1}_{(0, \beta)}(\beta t) + \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(\beta t) = t \mathbb{1}_{(0, 1)}(t) + \mathbb{1}_{[1, \infty)}(t) = F_1(t).$$

Obtenemos entonces

$$P_\beta(\max\{X_1, \dots, X_n\}/\beta \leq t) = F_1(t)^n.$$

Habiendo comprobado que es pivote, buscamos $t_{\alpha 1}, t_{\alpha 2}$ tales que

$$P_\beta(t_{\alpha 1} \leq \max\{X_1, \dots, X_n\}/\beta \leq t_{\alpha 2}) = F_1(t_{\alpha 2})^n - F_1(t_{\alpha 1})^n = 1 - \alpha.$$

Esta ecuación tiene múltiples soluciones, por ejemplo $t_{\alpha 2} = 1, t_{\alpha 1} = \alpha^{1/n}$. O bien, $t_{\alpha 1} = (\alpha/2)^{1/n}, t_{\alpha 2} = (1 - \alpha/2)^{1/n}$. En cualquier caso, el intervalo de confianza para β se obtiene despejando la desigualdad dentro de la probabilidad, para llegar a

$$\max\{X_1, \dots, X_n\}/t_{\alpha 2} \leq \beta \leq \max\{X_1, \dots, X_n\}/t_{\alpha 1}.$$

Para la aplicación numérica supongamos que se escoge la segunda solución, de manera que $t_{\alpha 1} = (\alpha/2)^{1/n} = (0.05)^{1/4} = 0.4728$ y $t_{\alpha 2} = (1 - \alpha/2)^{1/n} = (0.95)^{1/4} = 0.9873$. Además $\max\{1.13, 0.67, 1.32, 0.27\} = 1.32$, luego los extremos del intervalo son $1.32/0.9873 =$

1.337 y $1.32/0.4728 = 2.792$. Finalmente, el intervalo con nivel $100(1 - \alpha)\% = 90\%$ de confianza para β es

$$[1.337, 2.792].$$

Si escogemos la segunda solución encontramos $t_{\alpha 1} = (0.1)^{1/4} = 0.5623, t_{\alpha 2} = 1$ y el intervalo para β sería

$$[1.32, 2.35].$$

Comparando los intervalos en términos de sus largos, vemos que el segundo es mejor. Nota a los correctores: cualquier solución correcta vale como respuesta y no se espera que el estudiante compare soluciones ni comente.