



## PAUTA EXAMEN

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

3. Sea  $X$  una v.a. con valores en  $[0, 1]$  y densidad  $p_\theta(x)$ ,  $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ . Se sabe que

$$p_{\theta_0}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{y} \quad p_{\theta_1}(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

(a) (3p) Desarrolle el test de Neymann-Pearson de nivel  $\alpha = 0.1$  para  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs  $H_1 : \theta = \theta_1$  en base a una muestra de tamaño  $n = 1$ .

**Sol.:** El test de Neyman-Pearson de nivel  $\alpha$  tiene región crítica dada por,

$$R = \{x \in \mathcal{X} | p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x) \geq k_\alpha\},$$

donde  $k_\alpha$  es una constante por determinar.

La desigualdad para el cociente de verosimilitudes se escribe como

$$\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)} = 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \geq k_\alpha.$$

Para determinar  $k_\alpha$ , notemos que bajo  $H_0$ ,  $X$  se distribuye como una variable aleatoria uniforme en  $[0, 1]$ . Entonces

$$P_{\theta_0}(R) = P_{\theta_0}(4X^3 \geq k_\alpha) = P_{\theta_0}(X \geq \sqrt[3]{k_\alpha/4}) = 1 - \sqrt[3]{k_\alpha/4}.$$

Si queremos que el test tenga nivel  $\alpha$ , resolvemos la ecuación

$$1 - \sqrt[3]{k_\alpha/4} = \alpha,$$

cuya solución es

$$k_\alpha = 4(1 - \alpha)^3 = 2.9160.$$

Así, la región crítica resultante es

$$R = \{x \in \mathcal{X} | 4x^3 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \geq 2.9160\} \quad (1)$$

$$\text{o también, } R = \{x \in \mathcal{X} | x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \geq 0.9\}. \quad (2)$$

(b) (1.5p) Calcule la potencia del test resultante.

**Sol.:** La función de potencia es

$$P_{\theta_1}(R) = P_{\theta_1}(X \geq 0.9) = \int_{0.9}^1 4x^3 dx = 1^4 - (0.9)^4 = 1 - 0.6561 = 0.3439.$$

Observación: En la sección de Gouet, la función de potencia es  $P_\theta(R)$  cuando  $\theta$  está en el espacio de parámetros dada por la hipótesis alternativa y la respuesta anterior es suficiente. Si consideramos la función de potencia como  $P_\theta(R)$  con  $\theta$  en el espacio de parámetros, entonces hay que notar que  $P_{\theta_0}(R) = \alpha$ .

(c) (1.5p) Aplique el test a la muestra  $x_1 = 0.92$ .

**Sol.:** Dado que  $x_1 \in [0, 1]$  y que

$$4x_1^3 = 3.1148 \geq 2.9160,$$

entonces rechazamos la hipótesis nula para un nivel de significación  $\alpha = 0.1$ . También se puede argumentar considerando la región de rechazo dada por (2), y decir que  $0.92 \geq 0.9$ .

Tiempo: 3 horas.