Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2011

Roberto Cortez
Ángel Pardo
Alfredo Torrico

Control 3

9 de enero de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. *a*) (3,0 ptos.) El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (i.e., la raíz del estimador insesgado de la varianza) es de 50. Asumiendo que el puntaje tiene distribución normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

b) (3,0 ptos.) En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26 \quad (\text{luego, } \sum (X_i - \overline{X})^2 = 0{,}14275).$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.

P2. *a*) (2,0 ptos.) Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una distribución con densidad dada por $f(x) = rx^{r-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, donde $r > 0$ es un parámetro desconocido. Encuentre estimadores para r usando el método de máxima verosimilitud y de los momentos.

b) Una conocida marca de alimentos afirma que sus cajas de cereales contienen 50gr de almendras en promedio, pero usted sospecha que contienen estrictamente menos. Para verificar su afirmación, usted cuidadosamente separa las almendras de 9 cajas de cereales, y al pesarlas obtiene 49gr, 51gr, 46gr, 49gr, 51gr, 48gr, 51gr, 46gr y 50gr. Suponga que la variable en consideración tiene distribución normal con ambos parámetros desconocidos.

1) (3,0 ptos.) Calcule el p-valor del test que resuelve su sospecha. Para un nivel de confianza del 5 %, ¿qué se puede concluir?
2) (1,0 ptos.) En la caja de cereales se especifica que la raíz de la varianza de la cantidad de almendras es de 4gr, pero usted nuevamente sospecha que es estrictamente menor. ¿Cuál es el p-valor del test correspondiente? ¿Qué se concluye si se usa un nivel de confianza del 5 %?

P3. Usted está en una larga fila en un banco. Mientras espera, usted comienza a anotar los tiempos que transcurren entre la llegada de cada cliente al banco, obteniendo una secuencia $X_1, \dots, X_n$ de variables aleatorias. Usted sabe que de acuerdo a la teoría, los (X_i) son variables independientes con ley $\exp(\lambda)$, para un cierto $\lambda > 0$ desconocido que usted quiere aproximar. Sea $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

a) (1,2 ptos.) Muestre que $\mathbb{E}(\overline{X}) = 1/\lambda$ y que $\text{var}(\overline{X}) = 1/(n\lambda^2)$.

b) (1,2 ptos.) Ya que $\mathbb{E}(\overline{X}) = 1/\lambda$, usted pretende aproximar λ utilizando el estimador $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$. Muestre que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando $n \to \infty$.

c) (1,2 ptos.) Usted quiere garantizar que con probabilidad alta su estimación tiene un error relativo no mayor que α, es decir, usted quisiera que la cantidad $\mathbb{P}(|\hat{\lambda} - \lambda| > \alpha\lambda)$ fuese pequeña. Para acotar esta probabilidad, primero muestre que $|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \alpha\lambda$ si y solo si $-\alpha/(\lambda[1+\alpha]) \leq \overline{X} - 1/\lambda \leq \alpha/(\lambda[1-\alpha])$. Luego concluya que

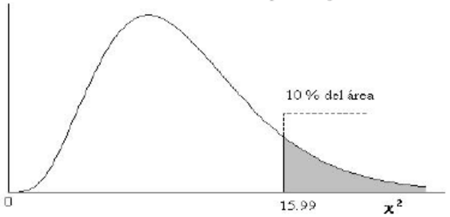
$$\mathbb{P}(|\hat{\lambda} - \lambda| > \alpha\lambda) \leq \mathbb{P}\left(|\overline{X} - 1/\lambda| > \frac{\alpha}{\lambda(1+\alpha)}\right).$$

d) (1,2 ptos.) Muestre que $\mathbb{P}(|\hat{\lambda} - \lambda| > \alpha\lambda) \leq (1+\alpha)^2/(n\alpha^2)$.

e) (1,2 ptos.) Utilizando lo anterior, determine cuántas observaciones usted debe tomar para que, con probabilidad de al menos un 90 %, el error relativo de su aproximación sea menor que $\alpha = 25\,\%$.

TABLA 3: DISTRIBUCIÓN χ^2

Puntos de porcentaje de la distribución χ^2



Ejemplo:
Para ϕ = 10 grados de libertad

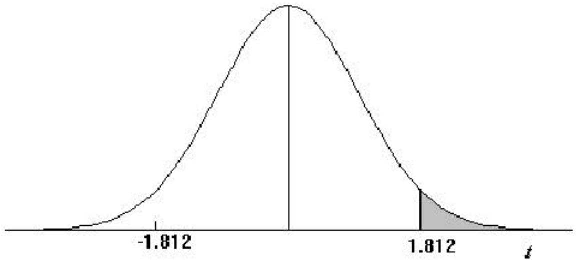
$P[\chi^2 > 15.99] = 0.10$

α / ϕ	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	α / ϕ
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
Z_α	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	Z_α

Para $\phi > 100$ tómese $\chi^2 = \frac{1}{2}\left(Z_\alpha + \sqrt{2\phi - 1}\right)^2$. Z_α es la desviación normal estandarizada correspondiente al nivel de significancia y se muestra en la parte superior de la tabla.

TABLA 2: DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

Puntos de porcentaje de la distribución t



Ejemplo

Para ϕ = 10 grados de libertad:

$P[t > 1.812] = 0.05$
$P[t < -1.812] = 0.05$

r \ α	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	636,578
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,600
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,689
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,660
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,290