



EXAMEN

4 de diciembre de 2010

Tiempo: 3 horas

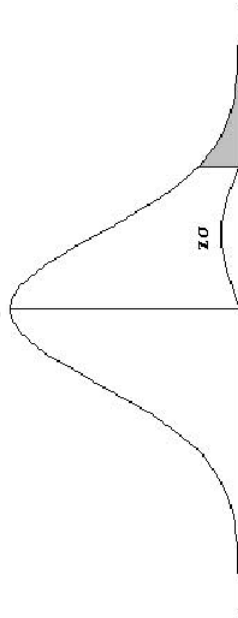
- P1.** a) Una persona tiene que escoger 5 de sus 8 amigos para irse de viaje. ¿De cuántas formas puede escoger a los amigos si
- 1) (1,5 pts.) dos de ellos están peleados entre sí y no irán juntos?
 - 2) (1,5 pts.) dos de ellos solo van si los invitan a ambos?
- b) Un avión se ha perdido, y se presume que está en una de 3 posibles zonas, de manera equiprobable. Denotemos α_i , para $i = 1, 2, 3$, la probabilidad de que una búsqueda encuentre el avión en la zona i cuando efectivamente está en esa zona. Se realizará una búsqueda en las tres regiones.
- 1) (1,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el avión?
 - 2) (1,5 pts.) Dado que la búsqueda en la zona 1 no encontró al avión, calcule la probabilidad de que esté en la zona i , para $i = 1, 2, 3$.
- P2.** Considere una variable aleatoria X con densidad dada por $f_X(x) = Cxe^{-x/\theta} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$, donde C y θ son constantes.
- a) (1,2 pts.) Muestre que $C = 1/\theta^2$.
 - b) (1,2 pts.) Muestre que $\mathbb{E}(X) = 2\theta$.
 - c) (1,2 pts.) Muestre que $\text{var}(X) = 2\theta^2$.
 - d) (1,2 pts.) Considere una muestra aleatoria simple X_1, \dots, X_n proveniente de X . Calcule el estimador de máxima verosimilitud de θ , y muestre que es insesgado.
 - e) (1,2 pts.) Suponga que el valor del estimador máximo verosímil $\hat{\theta}$ obtenido en una muestra de tamaño $n = 50$ es de 10,0. Obtenga un intervalo de confianza para θ al nivel 5%. *Indicación:* aproxime utilizando el hecho que la cantidad $(\bar{X} - 2\theta)/(\hat{\theta}\sqrt{2/n})$ converge en distribución a una normal estándar cuando $n \rightarrow \infty$. *Bonus:* demuestre esta afirmación (1,0 pto.).
- P3.** a) (3,0 pts.) Una autopista posee 4 pistas, y se desea investigar si los conductores tienen preferencia por alguna de ellas. Se observó la pista por la que transitaban 1000 automóviles, cuyos resultados se resumen en la siguiente tabla. ¿Hay suficiente evidencia para decir que algunas pistas son preferidas sobre otras? Use $\alpha = 0,05$.

Pista	1	2	3	4
Cantidad observada	294	276	238	192

- b) Se dispone de una muestra aleatoria simple $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ de datos provenientes del par de variables (X, Y) , donde $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ y $\text{var}(X) > 0$ son finitas.
- 1) (1,5 pts.) Argumente que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ y $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ convergen casi seguramente a $\mathbb{E}(XY)$ y $\mathbb{E}(X^2)$, respectivamente, cuando $n \rightarrow \infty$.
 - 2) (1,5 pts.) Se ajusta un modelo lineal de la forma $Y \approx aX + b$, el cual se resuelve mediante el criterio de minimizar la suma de residuos al cuadrado, con lo cual se obtienen las cantidades \hat{a}_n y \hat{b}_n . Muestre que $\hat{a}_n \rightarrow \text{cov}(X, Y)/\text{var}(X)$ y $\hat{b}_n \rightarrow \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\text{cov}(X, Y)/\text{var}(X)$ casi seguramente cuando $n \rightarrow \infty$.

TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL

Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

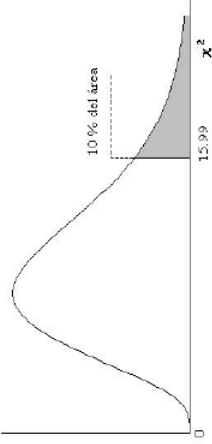
$$P[Z > 1] = 0.1587$$

$$P[Z > 1.96] = 0.0250$$

Desv. normal	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

TABLA 3: DISTRIBUCIÓN χ^2

Puntos de porcentaje de la distribución χ^2



Ejemplo:

Para $\phi = 10$ grados de libertad

$$P[\chi^2 > 15.99] = 0.10$$

$\frac{\chi^2}{\phi}$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	$\frac{\chi^2}{\phi}$
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.21	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
Z_α	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	Z_α

Para $\phi > 100$ tómese $\chi^2 = \frac{1}{2} \left(Z_\alpha + \sqrt{2\phi - 1} \right)^2$. Z_α es la desviación normal estandarizada correspondiente al nivel de significancia y se muestra en la parte superior de la tabla.