



## PAUTA CONTROL 1

- P1.** a) 1) El resultado se obtiene recordando que  $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(EF)$  y notando que:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}((E \cup F) \cup (E \cup F)^c) = \mathbb{P}(E \cup F) + \mathbb{P}(E^c F^c).$$

- 2) El evento en que exactamente uno de ellos ocurre corresponde a que ocurra  $E$  y no  $F$ , o bien  $F$  y no  $E$ . Luego, la probabilidad buscada es:

$$\mathbb{P}((E \setminus F) \cup (F \setminus E)) = \mathbb{P}(E \setminus F) + \mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(EF),$$

donde hemos usado que  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(EF^c \cup EF) = \mathbb{P}(E \setminus F) + \mathbb{P}(EF)$ , ídem para  $F$ .

- 3) Agrupando  $F$  y  $G$ , tenemos:

$$\mathbb{P}(E \cup (F \cup G)) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \cup G) - \mathbb{P}(E(F \cup G)).$$

Además:

$$\mathbb{P}(E(F \cup G)) = \mathbb{P}(EF \cup EG) = \mathbb{P}(EF) + \mathbb{P}(EG) - \mathbb{P}(EFG).$$

Juntando esto con el hecho que  $\mathbb{P}(F \cup G) = \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG) - \mathbb{P}(EF) - \mathbb{P}(EG) + \mathbb{P}(EFG) \\ &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - (\mathbb{P}(EFG) + \mathbb{P}(E^c FG)) \\ &\quad (\mathbb{P}(EFG) + \mathbb{P}(EFG^c)) - (\mathbb{P}(EFG) + \mathbb{P}(EF^c G)) + \mathbb{P}(EFG). \end{aligned}$$

- b) Fijémonos en las formas de asignar el turno de día, pues el turno de noche queda conformado por personas restantes. Para que a cada persona le toque el turno que prefiere, las  $a$  personas deben ir al turno de día (1 forma de hacerlo), y de las restantes que no son del grupo de las  $b$  que prefieren el turno de noche (i.e., de  $2n - a - b$ ) se escogen  $n - a$ , lo cual puede hacerse de  $\binom{2n-a-b}{n-a}$  formas. Como la cantidad de formas de asignar el turno de día es  $\binom{2n}{n}$ , la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}.$$

- P2.** a) Claramente, se necesitan al menos  $m$  lanzamientos. Y en el lanzamiento  $2m - 1$  necesariamente hay  $m$  caras o  $m$  sellos, por lo cual el  $R_X = \{m, \dots, 2m - 1\}$ . Para  $k$  en el rango, se tiene que el evento  $\{X = k\}$  ocurre cuando han salido  $m - 1$  caras (y el resto sellos) antes del lanzamiento  $k$ -ésimo, y en dicho lanzamiento debe aparecer una cara; o bien lo análogo con los sellos. Luego, la función distribución es:

$$\begin{aligned} p_X(k) &= \mathbb{P}(X = k) \\ &= p \binom{k-1}{m-1} p^{m-1} (1-p)^{k-1-(m-1)} + (1-p) \binom{k-1}{m-1} (1-p)^{m-1} p^{k-1-(m-1)} \\ &= \binom{k-1}{m-1} \{p^m (1-p)^{k-m} + (1-p)^m p^{k-m}\}. \end{aligned}$$

- b) 1) Sea  $Z = \min\{X, Y\}$ . El mínimo de dos cantidades es mayor que  $k$  si y sólo si ambas cantidades son mayores que  $k$ . Luego:

$$\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k),$$

Donde hemos usado la independencia de  $X$  e  $Y$ . Se tiene que  $\mathbb{P}(X > k)$  vale  $(1-p)^k$ , pues el evento  $\{X > k\}$  corresponde a pedir que las primeras  $k$  repeticiones del experimento sean fracaso; ídem para  $Y$  (también puede calcularse usando la función distribución de una variable geométrica). Luego:

$$\mathbb{P}(Z > k) = [(1-p)(1-q)]^k = [1 - (p+q-pq)]^k,$$

es decir,  $Z \sim \text{geom}(p+q-pq)$ . Esto se debe a que la variable  $Z$  corresponde a la primera vez que ocurre un éxito, ya sea en los experimentos asociados a  $X$  (evento  $E$ , que tiene probabilidad  $p$ ) o en los asociados a  $Y$  (evento  $F$ , que tiene probabilidad  $q$ ), donde

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(EF) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) = p + q - pq.$$

- 2) Sea  $Z = X + Y$ . Para  $k \in \{0, \dots, n+m\}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X + Y = k, X = i) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y = k - i, X = i) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y = k - i) \mathbb{P}(X = i), \end{aligned}$$

donde hemos usado la independencia de  $X$  e  $Y$ . Cuando  $i > k$  o bien  $i > n$  el término de la suma vale 0, y usando la forma de la distribución binomial, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^k \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^k \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} \\ &= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la indicación. Esto prueba que  $Z \sim \text{bin}(n+m, p)$ , lo cual se debe a que  $Z$  representa la cantidad de éxitos que se obtienen al realizar  $n+m$  repeticiones de un experimento con probabilidad  $p$  de éxito, correspondientes a las realizaciones asociadas a  $X$  e  $Y$  en conjunto.

- P3.** a) 1) Llamemos  $M$  a la marca de la ampollita, y  $T$  a su duración. Queremos calcular la probabilidad de que la marca sea  $B$ , dado que duró más de 200 días. Por regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(M = B \mid T > 200) = \frac{\mathbb{P}(T > 200 \mid M = B) \mathbb{P}(M = B)}{\mathbb{P}(T > 200)}$$

Se tiene que  $\mathbb{P}(M = B) = 1/2$  y que  $\mathbb{P}(T > 200 \mid M = B) = e^{-200\lambda_B} = e^{-1/2}$ , pues cuando  $M = B$  se tiene que  $T \sim \exp(\lambda_B)$ . Además, por regla de probabilidades totales, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > 200) &= \mathbb{P}(T > 200 \mid M = A) \mathbb{P}(M = A) + \mathbb{P}(T > 200 \mid M = B) \mathbb{P}(M = B) \\ &= \frac{e^{-200\lambda_A}}{2} + \frac{e^{-200\lambda_B}}{2} \\ &= \frac{e^{-2} + e^{-1/2}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(M = B \mid T > 200) = \frac{e^{-1/2}}{e^{-2} + e^{-1/2}}.$$

2) Veamos:

$$\mathbb{P}(T > 400 \mid T > 200) = \frac{\mathbb{P}(T > 400, T > 200)}{\mathbb{P}(T > 200)} = \frac{\mathbb{P}(T > 400)}{\mathbb{P}(T > 200)},$$

donde  $\mathbb{P}(T > 200)$  ya fue calculado, y  $\mathbb{P}(T > 400)$  se calcula análogamente. Obtenemos:

$$\mathbb{P}(T > 400 \mid T > 200) = \frac{e^{-400\lambda_A} + e^{-400\lambda_B}}{e^{-200\lambda_A} + e^{-200\lambda_B}} = \frac{e^{-4} + e^{-1}}{e^{-2} + e^{-1/2}}.$$

- b) 1) Si  $U$  es el punto en que se corta el cordel, es claro que  $X = \max\{U, L - U\}$ .  $X$  está entre  $L/2$  y  $L$ , por lo cual  $\mathbb{P}(X \leq L/2) = 0$  y  $\mathbb{P}(X \leq L) = 1$ . Para  $x \in [L/2, L]$ , se tiene que:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\max\{U, L - U\} \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x, L - U \leq x) = \mathbb{P}(U \in [L - x, x]),$$

donde  $\mathbb{P}(U \in [L - x, x]) = [x - (L - x)]/L = 2x/L - 1$ , pues  $U \sim \text{unif}(0, L)$ . Luego, la densidad de  $X$  es  $f_X(x) = 1/(L/2)$  para  $x \in [L/2, L]$ , y 0 fuera de ese intervalo. Es decir,  $X \sim \text{unif}(L/2, L)$ .

- 2) Es claro que el trozo menor corresponde a  $L - X$ . Luego, lo que se quiere calcular es:

$$\mathbb{P}(X \leq 4(L - X)) = \mathbb{P}(X \leq 4L/5) = 2(4L/5)/L - 1 = 3/5,$$

donde hemos usado que  $X \sim \text{unif}(L/2, L)$ .