



PAUTA EXAMEN

P1. a) 1) La cantidad buscada es

$$\binom{5}{2} \binom{7}{3} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 5 \times 2 \times 7 \times 5 = 350,$$

donde el primer término de la izquierda son las formas de escoger los 2 ingenieros y el segundo término las formas de escoger los 3 técnicos.

2) La cantidad buscada es

$$\binom{5}{2} \binom{6}{2} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 5 \times 2 \times 3 \times 5 = 150,$$

donde el primer término de la izquierda son las formas de escoger los 2 ingenieros y el segundo término las formas de escoger los 2 técnicos que faltan dentro de los disponibles una vez que se escoge el que debe estar en la comisión.

3) La cantidad buscada es

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} \binom{6}{3} + \binom{4}{2} \binom{6}{2} + \binom{4}{2} \binom{6}{3} &= 4 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} + \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} + \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \\ &= 4 \times 5 \times 4 + 2 \times 3 \times 3 \times 5 + 2 \times 3 \times 5 \times 4 \\ &= 80 + 90 + 120 \\ &= 290. \end{aligned}$$

El primer sumando de la expresión de la izquierda corresponde a las formas de escoger el comité en que el ingeniero conflictivo sí está, pero el técnico conflictivo no está. El segundo sumando corresponde a que el técnico conflictivo sí está pero el ingeniero no. El último sumando corresponde a que ambos no están.

Otra forma de obtener el resultado es pasando al complemento: la cantidad buscada corresponde al total de formas menos aquellas en que están el ingeniero y el técnico conflictivos, es decir:

$$350 - \binom{4}{1} \binom{6}{2} = 350 - 4 \times \frac{6 \times 5}{2} = 350 - 60 = 290.$$

4) La cantidad buscada es:

$$\begin{aligned} \binom{3}{0} \binom{7}{3} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} + 2 \binom{3}{1} \binom{7}{2} + 2 \binom{3}{1} \binom{7}{3} + 2 \binom{3}{2} \binom{7}{2} + \binom{3}{2} \binom{7}{3} \\ = [1 + 6 + 3] \binom{7}{3} + [6 + 6] \binom{7}{2} + 3 \binom{7}{1} \\ = 10 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} + 12 \times \frac{7 \times 6}{2} + 3 \times 7 \\ = 350 + 252 + 21 \\ = 623. \end{aligned}$$

El primer sumando en la expresión de arriba son los comités en que ambos ingenieros son escogidos como tal; el segundo sumando es cuando ambos ingenieros son escogidos como técnicos; el tercer sumando es cuando uno se escoge como técnico y el otro como ingeniero; el cuarto sumando es cuando uno de ellos se escoge como ingeniero y el otro no se escoge; el quinto sumando es cuando

uno de ellos se escoge como técnico y el otro no se escoge; el último sumando es cuando ninguno de los dos ingenieros se escoge.

Una forma más simple es sumando los casos en que 0, 1, ó 2 de ellos se elige como técnico, es decir:

$$350 + 2 \binom{4}{2} \binom{7}{2} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} = 350 + 2 \times \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{7 \times 6}{2} + 3 \times 7 = 350 + 252 + 21 = 623.$$

b) Llamemos:

B : usted viaja en bicicleta

T : tiempo llegada a la universidad (en minutos desde las 8:00)

X : tiempo de viaje en bicicleta

Y : tiempo de espera del autobús

- 1) Queremos calcular la probabilidad de llegar antes de las 8:30, es decir, que $T \leq 30$. Condicionando en el medio de transporte, por regla de probabilidades totales obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq 30) &= \mathbb{P}(T \leq 30|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(T \leq 30|B^c)\mathbb{P}(B^c) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 30)3/4 + \mathbb{P}(Y + 25 \leq 30)1/4 \\ &= \mathbb{P}(X \leq 30)3/4 + \mathbb{P}(Y \leq 5)1/4 \\ &= 1/2 \times 3/4 + 1/4 \times 1/4 \\ &= 3/8 + 1/16 \\ &= 7/16. \end{aligned}$$

- 2) Por regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(B^c|T > 30) = \frac{\mathbb{P}(T > 30|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(T > 30)} = \frac{\mathbb{P}(Y > 5)1/4}{9/16} = \frac{3/4 \times 1/4}{9/16} = 1/3.$$

- 3) Notemos que $\mathbb{E}(X) = 30$ y $\mathbb{E}(Y) = 10$. Utilizando esperanzas condicionales, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(T|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{E}(T|B^c)\mathbb{P}(B^c) \\ &= \mathbb{E}(X)\mathbb{P}(B) + \mathbb{E}(Y + 25)\mathbb{P}(B^c) \\ &= 30 \times 3/4 + (25 + 10) \times 1/4 \\ &= (90 + 25 + 10)/4 = 125/4 = 31,25, \end{aligned}$$

es decir, la hora esperada de llegada es a las 8:31 con 15 segundos.

- P2.** a) 1) Para que la aguja quede sobre la línea, debe cumplirse que la proyección de la mitad de la aguja más cercana a la línea sobre el eje perpendicular (es decir, $(l/2) \cos \Theta$) sea mayor que la distancia desde el centro de la aguja a dicha línea (es decir, X). En otras palabras, la aguja queda sobre la línea si y sólo si $(l/2) \cos \Theta \geq X$.
- 2) Queremos calcular $\mathbb{P}(X \leq (l/2) \cos \Theta)$. Como X y Θ son independientes, su densidad conjunta es el producto de sus densidades. Luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq (l/2) \cos \Theta) &= \iint_{\{(x,\theta): x \leq (l/2) \cos \theta\}} f_{X,\Theta}(x, \theta) dx d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{(l/2) \cos \theta} f_X(x) dx \right] f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(l/2) \cos \theta}{a/2} f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \frac{l}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{l}{\pi a} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{2l}{\pi a}. \end{aligned}$$

- 3) Para aproximar π , lanzamos n veces la aguja, y denotamos c_n a la cantidad de veces que cae sobre una línea. Por LFGN, sabemos que c_n/n converge casi seguramente a $\mathbb{P}(\text{caer sobre línea}) = 2l/(\pi a)$ cuando hacemos $n \rightarrow \infty$. Es decir, para n grande, se espera que

$$\pi \approx \frac{2nl}{ac_n}.$$

Es decir, se repite el experimento muchas veces y la cantidad $2nl/(ac_n)$ será una aproximación de π .

- b) 1) Sabemos que la integral de la densidad debe ser 1, luego:

$$1 = \int_0^1 Cx^{r-1}(1-x)dx = C \left[\int_0^1 x^{r-1}dx - \int_0^1 x^r dx \right] = C \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \right] = C \frac{1}{r(r+1)},$$

luego $C = r(r+1)$. Calculemos la esperanza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^1 xCx^{r-1}(1-x)dx = C \left[\int_0^1 x^r dx - \int_0^1 x^{r+1} dx \right] \\ &= r(r+1) \left[\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} \right] \\ &= r(r+1) \frac{1}{(r+1)(r+2)} \\ &= \frac{r}{r+2}. \end{aligned}$$

- 2) Para obtener el estimador de r del método de los momentos, igualamos el primer momento muestral con el primer momento real de X , es decir:

$$\bar{X} = \frac{r}{r+2} \Leftrightarrow \hat{r} = \frac{2\bar{X}}{1-\bar{X}}.$$

Por LFGN, sabemos que \bar{X} converge casi seguramente al valor esperado de X , es decir, a $r/(r+2)$. Con esto, tenemos que \hat{r} converge casi seguramente a

$$\frac{2r/(r+2)}{1-r/(r+2)} = \frac{2r}{(r+2)-r} = \frac{2r}{2} = r,$$

como queríamos probar.

- P3.** a) 1) Sea $\sigma^2 = 4$ la varianza de la variable en estudio. Trabajamos con el estadístico

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

el cual sabemos que tiene distribución aproximadamente normal estándar. Imponemos el nivel deseado para un intervalo simétrico:

$$1 - 5\% = \mathbb{P}(-c \leq Z \leq c) \approx \mathbb{P}(-c \leq \mathcal{N}(0,1) \leq c) = 1 - 2\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > c),$$

es decir, $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > c) \approx 2,5\%$. De una tabla, se obtiene $c = 1,96$. Luego, el intervalo para μ queda:

$$\begin{aligned} & -c \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c \\ \Leftrightarrow & \bar{X} - c\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + c\sigma/\sqrt{n} \\ \Leftrightarrow & 8,0 - 1,96 \times 2/\sqrt{10} \leq \mu \leq 8,0 + 1,96 \times 2/\sqrt{10} \\ \Leftrightarrow & 8,0 - 0,392 \leq \mu \leq 8,0 + 0,392 \\ \Leftrightarrow & 7,608 \leq \mu \leq 8,392 \\ \Leftrightarrow & \mu \in [7,608, 8,392] \end{aligned}$$

- 2) Por lo hecho anteriormente, para un n genérico, el intervalo de confianza al mismo nivel de 5 % es $[8,0 - 1,96 \times 2/\sqrt{n}, 8,0 + 1,96 \times 2/\sqrt{n}]$. Por lo tanto, para que el largo del intervalo anterior sea 0,5, imponemos:

$$2 \times 1,96 \times 2/\sqrt{n} \leq 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq 2 \times 2 \times 1,96 \times 2 = 15,68.$$

El primer n tal que \sqrt{n} es mayor o igual que 15,68 es $n = 246$ (se acepta cualquier valor entre $15^2 = 225$ y $16^2 = 256$). Luego, se necesitan 146 baterías adicionales.

- b) Sean las variables aleatorias

X : rango de edad

Y : tipo de audiencia.

Los datos de la tabla provienen de una m.a.s. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. Planteamos las hipótesis

H_0 : X e Y independientes

H_1 : X e Y no independientes.

Para decidir el test, utilizamos el estadístico

$$\Delta = n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(\hat{p}_{ij} - \hat{p}_i^X \hat{p}_j^Y)^2}{\hat{p}_i^X \hat{p}_j^Y},$$

donde:

- n_{ij} : cantidad observada de datos en el rango de edad i y de tipo de audiencia j
- $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$: probabilidad empírica de observar rango de edad i y tipo de audiencia j
- $\hat{p}_i^X = \frac{\sum_j n_{ij}}{n}$: probabilidad empírica de observar rango de edad i
- $\hat{p}_j^Y = \frac{\sum_i n_{ij}}{n}$: probabilidad empírica de observar tipo de audiencia j .

Completemos la tabla para obtener los datos necesarios para calcular el estadístico Δ :

Violencia \ Edad	16-34	35-54	55 ó más	
Baja	8	11	21	$\sum_i n_{i1} = 40$
Alta	18	15	7	$\sum_i n_{i2} = 40$
	$\sum_j n_{1j} = 26$	$\sum_j n_{2j} = 26$	$\sum_j n_{3j} = 28$	$n = 80$

Luego, el valor observado de Δ es:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{obs}} &= 80 \left[\frac{\left(\frac{8}{80} - \frac{26}{80} \frac{40}{80}\right)^2}{\frac{26}{80} \frac{40}{80}} + \frac{\left(\frac{11}{80} - \frac{26}{80} \frac{40}{80}\right)^2}{\frac{26}{80} \frac{40}{80}} + \frac{\left(\frac{21}{80} - \frac{28}{80} \frac{40}{80}\right)^2}{\frac{28}{80} \frac{40}{80}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{18}{80} - \frac{26}{80} \frac{40}{80}\right)^2}{\frac{26}{80} \frac{40}{80}} + \frac{\left(\frac{15}{80} - \frac{26}{80} \frac{40}{80}\right)^2}{\frac{26}{80} \frac{40}{80}} + \frac{\left(\frac{7}{80} - \frac{28}{80} \frac{40}{80}\right)^2}{\frac{28}{80} \frac{40}{80}} \right] \\ &= 80 \left[\frac{(8-13)^2}{26 \times 40} + \frac{(11-13)^2}{26 \times 40} + \frac{(21-14)^2}{28 \times 40} + \frac{(18-13)^2}{26 \times 40} + \frac{(15-13)^2}{26 \times 40} + \frac{(7-14)^2}{28 \times 40} \right] \\ &= \frac{5^2}{13} + \frac{2^2}{13} + \frac{7^2}{14} + \frac{5^2}{13} + \frac{2^2}{13} + \frac{7^2}{14} = \frac{58}{13} + \frac{98}{14} = 4 + \frac{6}{13} + 7 \approx 11,5. \end{aligned}$$

Sabemos que bajo H_0 , el estadístico Δ tiene distribución aproximadamente $\chi_{(3-1)(2-1)}^2 = \chi_2^2$. El p -valor es la probabilidad de obtener algo tan extremo como lo observado, es decir:

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}(\Delta \geq \Delta_{\text{obs}} | H_0) = \mathbb{P}(\chi_2^2 \geq 11,5) \leq 0,005 = 0,5 \%.$$

Luego, como el p -valor es menor que el nivel deseado del 5 %, corresponde rechazar H_0 . Es decir, el tipo de audiencia no es independiente del rango de edad.