

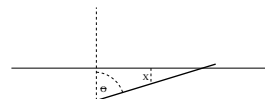


## EXAMEN

20 de enero de 2012

Tiempo: 3 horas

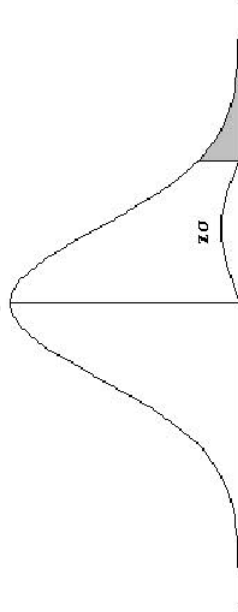
- P1.** a) De un equipo de 5 ingenieros y 7 técnicos debe constituirse una comisión de 2 ingenieros y 3 técnicos. ¿De cuántas formas puede hacerse si:
- 1) (0,5 ptos.) todos son igualmente elegibles?
  - 2) (0,5 ptos.) hay un técnico en particular que debe estar en la comisión?
  - 3) (1,0 pto.) hay un ingeniero y un técnico que no pueden escogerse simultáneamente?
  - 4) (1,0 pto.) 2 de los 5 ingenieros también cuentan como técnicos? (distinguiendo el cargo asignado).
- b) Usted sale de su casa a las 8:00, y debe llegar a la universidad a más tardar a las 8:30. Si usted se siente con energía, viaja en bicicleta, y el tiempo de viaje (en minutos) es una variable uniforme en  $[25, 35]$ . Si no se siente con energía, usted espera el autobús, que tarda en llegar al paradero un tiempo distribuido uniformemente en el intervalo  $[0, 20]$  (independiente del tiempo de viaje en bicicleta), y lo deja en la universidad luego de 25 minutos de viaje. Suponga que la probabilidad de sentirse con energía es  $p = 0,75$ .
- 1) (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que usted llegue a la hora?
  - 2) (1,0 pto.) Si usted llegó atrasado, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?
  - 3) (1,0 pto.) Calcule la esperanza de la hora de llegada a la universidad.
- P2.** a) Se dispone de un piso de “parquet” con líneas paralelas a distancia  $a > 0$ , como se muestra en la figura. Se lanza una aguja de largo  $l < a$  en el piso, de manera tal que la distancia  $X$  del centro de la aguja a la línea más cercana es una variable uniforme en  $[0, a/2]$ , y el ángulo  $\Theta$  que forma la aguja con el eje perpendicular a las líneas es uniforme en  $[-\pi/2, \pi/2]$ , independiente de  $X$ .
- 1) (1,0 pto.) Muestre que la aguja queda por sobre una línea si y sólo si  $X \leq (l/2) \cos \Theta$ .
  - 2) (1,5 ptos.) Muestre que la probabilidad de que la aguja quede por sobre una línea es  $2l/(\pi a)$ .
  - 3) (1,5 pto.) Con los elementos descritos, diseñe un procedimiento para aproximar  $\pi$ .
- b) Sea  $X$  variable aleatoria con densidad  $f(x) = Cx^{r-1}(1-x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ , donde  $r > 0$  es un parámetro.
- 1) (1,0 pto.) Muestre que  $C = r(r+1)$  y que  $\mathbb{E}(X) = r/(r+2)$ .
  - 2) (1,0 pto.) Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a.s. proveniente de la distribución de  $X$ . Calcule el estimador de  $r$  del método de los momentos. Muestre que este estimador converge casi seguramente a  $r$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- P3.** a) La duración (en horas) de unas determinadas baterías es una variable aleatoria con esperanza  $\mu$  y varianza 4. Se toma una m.a.s.  $X_1, \dots, X_n$  de la duración de  $n = 100$  baterías, obteniendo  $\bar{X} = 8,0$ .
- 1) (2,0 ptos.) Utilizando el TCL, entregue un intervalo de confianza para  $\mu$  al nivel 5 %.
  - 2) (1,0 pto.) ¿Cuántas baterías adicionales deben probarse para que el largo del intervalo sea de 0,5?
- b) (3,0 ptos.) En un estudio se clasificó a 80 televidentes en “audiencia de alta violencia” y “audiencia de baja violencia”, de acuerdo a los programas de televisión que ellos habitaban ver. Los resultados, segmentados por grupos de edad, se muestran en la siguiente tabla. ¿Hay suficiente evidencia para afirmar, al nivel 5 %, que el tipo de audiencia no es independiente de la edad del televidente? Entregue el  $p$ -valor del test (o al menos una cota).



Violencia \ Edad	16-34	35-54	55 ó más
Baja	8	11	21
Alta	18	15	7

**TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL**

Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

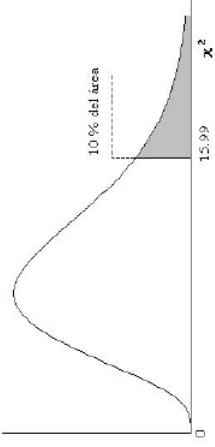
$$P[Z > 1] = 0.1587$$

$$P[Z > 1.96] = 0.0250$$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0224	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0022	0.0021	0.0020	0.0019	0.0018	0.0017
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

**TABLA 3: DISTRIBUCIÓN  $\chi^2$**

Puntos de porcentaje de la distribución  $\chi^2$



Ejemplo:

Para  $\phi = 10$  grados de libertad

$$P[\chi^2 > 15.99] = 0.10$$

$\frac{\chi^2}{\phi}$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	$\frac{\chi^2}{\phi}$
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
$Z_\alpha$	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	$Z_\alpha$

Para  $\phi > 100$  tómese  $\chi^2 = \frac{1}{2} \left( Z_\alpha + \sqrt{2\phi - 1} \right)^2$ .  $Z_\alpha$  es la desviación normal estandarizada correspondiente al nivel de significancia y se muestra en la parte superior de la tabla.