



PAUTA EXAMEN

P1. a) 1) El estudiante debe escoger 7 de 10 preguntas, lo cual corresponde a:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 \text{ formas.}$$

2) El estudiante puede escoger 3, 4 ó 5 de las 5 primeras preguntas, y después debe escoger 4, 3 ó 2 de las 5 restantes, respectivamente. Al sumar la cantidad de formas posibles en cada caso se obtiene lo buscado, es decir:

$$\binom{5}{3} \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \binom{5}{2} = 2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} + 1 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 110 \text{ formas.}$$

b) Llamemos A , B al evento en que las radios provienen de la fábrica A o B, respectivamente. Llamemos D_1 , D_2 al evento en que la primera o segunda radio revisada sale defectuosa, respectivamente.

1) Calculemos la probabilidad de que la primera radio salga defectuosa, aplicando probabilidades totales:

$$P(D_1) = P(D_1|A)P(A) + P(D_1|B)P(B) = \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{100} = 0,03.$$

2) Ahora nos piden calcular la probabilidad de que la segunda radio salga defectuosa dado que la primera lo fue, es decir:

$$\begin{aligned} P(D_2|D_1) &= \frac{P(D_2 D_1)}{P(D_1)} = \frac{P(D_2 D_1|A)P(A) + P(D_2 D_1|B)P(B)}{P(D_1)} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{100}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{100}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{25+1}{100} = \frac{13}{300} = 0,0433, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que, condicional a que las radios provienen de la fábrica A, D_1 y D_2 son independientes (ídem para la fábrica B).

P2. a) 1) Sabemos que la densidad debe integrar 1, luego:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 (ax + bx^2) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}.$$

Además, sabemos que la esperanza vale 0,6, es decir:

$$\frac{6}{10} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx^3) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{4}.$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones para a y b . Multiplicando la primera por 2 y restando la segunda multiplicada por 3, obtenemos:

$$2 - \frac{18}{10} = \frac{2b}{3} - \frac{3b}{4} = -\frac{b}{12},$$

luego $b = -12/5$ y $a = 18/5$.

2) Calculemos $F_X(x)$. Dado $0 \leq x \leq 1$, tenemos:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_0^x (ax + bx^2) dx = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} = \frac{9x^2}{5} - \frac{4x^3}{5}.$$

Además, es claro que $F_X(x) = 0$ para $x < 0$, y $F_X(x) = 1$ para $x > 1$. Por otra parte:

$$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = 1 - \frac{9}{20} + \frac{2}{20} = \frac{13}{20}.$$

3) Calculemos:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^4) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{18}{4 \cdot 5} - \frac{12}{5 \cdot 5} = \frac{90 - 48}{100} = \frac{21}{50}.$$

Luego:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{42}{100} - \frac{36}{100} = \frac{6}{100} = 0,06.$$

b) 1) Calculemos las marginales:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Esto vale para $x \geq 0$; para $x < 0$ la marginal vale 0. Luego, X es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ . Por simetría, lo mismo se concluye para Y . Además, X e Y son independientes, pues el producto de las marginales es la conjunta:

$$f_X(x)f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{[0,\infty) \times [0,\infty)}(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

2) Llamemos $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \alpha x\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} P(Y \geq \alpha X) &= \int \int_C f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_{\alpha x}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda \alpha x} dx \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \int_0^{\infty} \lambda(1+\alpha) e^{-\lambda(1+\alpha)x} dx \\ &= \frac{1}{1+\alpha}, \end{aligned}$$

donde la integral vale 1 pues el integrando es la densidad de una exponencial de parámetro $\lambda(1+\alpha)$.

3) Sea $Z = X/(X+Y)$. Dado $0 < t < 1$, utilizando la parte anterior obtenemos:

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X \leq (X+Y)t) = P((1-t)X/t \leq Y) = \frac{1}{1+(1-t)/t} = t.$$

Es claro que $F_Z(t) = 0$ para $t \leq 0$, y $F_Z(t) = 1$ para $t \geq 1$. Por lo tanto, Z es una variable uniforme en $[0, 1]$.

P3. a) Llamemos X_1, \dots, X_n a la duración de las baterías a probar. Imponemos que la probabilidad sea la que nos piden:

$$0,95 = P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,25) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{4\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Por el TLC, sabemos que $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene una distribución que es aproximadamente una normal estándar. Definiendo $c = 1/(4\sigma/\sqrt{n}) = \sqrt{n}/8$, tenemos entonces:

$$0,95 \approx P(|Z| \leq c) = 1 - 2P(Z > c), \quad \text{luego} \quad P(Z > c) = 0,025.$$

Mirando la tabla de la distribución normal estándar, obtenemos $c = 1,96$. Despejando n , se tiene:

$$1,96 = \sqrt{n}/8 \Rightarrow n = (8 \cdot 1,96)^2 \approx 247.$$

Por lo tanto, se requiere probar 247 baterías para que la estimación cumpla lo pedido.

b) Llamemos X_1, \dots, X_n , con $n = 200$, a las variables Bernoulli(p) que representan si cada persona renovó suscripción el último año, y definamos $\hat{p} = \bar{X}$. Sean

$$H_0 : p = 60\%$$

$$H_1 : p \neq 60\%.$$

El valor observado de \hat{p} es $108/200 = 54\%$. El p -valor es la probabilidad, bajo H_0 , de que \hat{p} esté al menos tan alejado de p como lo observado. Si $p_0 = 60\%$, entonces este “tan alejado” corresponde a $60\% - 54\% = 6\%$, con lo cual tenemos:

$$p\text{-valor} = P(|\hat{p} - p_0| > 6\%) = P\left(\left|\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}\right| > \frac{6\%}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}\right) = P(|Z| > c) = 2P(Z > c),$$

donde

$$c = \frac{6\%}{\sqrt{60\% \cdot 40\%/200}} = \frac{6\%}{\sqrt{1200/100^3}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3} = 1,732$$

y $Z = (\hat{p} - p_0)/\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$ tiene distribución aproximadamente normal estándar, por el TLC. Mirando una tabla, obtenemos que $P(Z > c) = 4,18$ y por lo tanto el p -valor vale $8,36\%$. Para un nivel de confianza del 2% , esto no es suficiente, y no se rechaza la hipótesis nula.