



## CONTROL 3

11 de junio de 2012

Tiempo: 3 horas

- P1.** (a) (2,0 ptos.) Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. proveniente de una distribución con densidad dada por  $f(x) = rx^{r-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ , donde  $r > 0$  es un parámetro desconocido. Encuentre estimadores para  $r$  usando el método de máxima verosimilitud y de los momentos.
- (b) La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con  $s^2$  igual a 0,9.
- 1) (1,5 ptos.) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para  $\mu$ .
  - 2) (1,5 ptos.) Suponga que se sabe que la varianza real es  $\sigma^2 = 1$ . ¿Cuál es el intervalo de confianza para  $\mu$  en este caso?
  - 3) (1,0 pto.) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

- P2.** Se dispone de una m.a.s.  $X_1, \dots, X_n$  proveniente de una distribución exponencial de parámetro  $\lambda > 0$  desconocido. Sean  $\alpha = 5\%$ ,  $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$  valores dados. Se plantean las hipótesis

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$

$$H_1 : \lambda = \lambda_1,$$

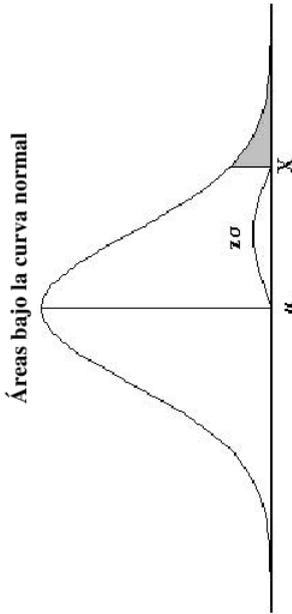
- (a) (1,5 ptos.) Muestre que el test más potente tiene región de rechazo de la forma  $R = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \text{CTE}\}$ . ¿Es uniformemente más potente entre todos los tests tales que  $\lambda_1 > \lambda_0$ ?
- (b) (1,5 ptos.) Escriba esta región de rechazo de la forma

$$R = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\bar{x} - 1/\lambda_0}{1/(\lambda_0\sqrt{n})} \leq c \right\},$$

donde  $c$  es una constante. Aproximando con un teorema adecuado, muestre que el valor de  $c$  tal que la probabilidad del error tipo I es igual al  $\alpha$  especificado, corresponde a  $c = -1,65$ .

- (c) (1,5 ptos.) De aquí en adelante suponga que  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = 2$  y  $n = 25$ . Nuevamente aproximando con un teorema adecuado, calcule la potencia del test del ítem anterior.
- (d) (1,5 ptos.) Suponga que el promedio observado en la muestra es 0,6. Aproximando nuevamente, calcule el  $p$ -valor del test. ¿Debe o no rechazarse  $H_0$ ?
- P3.** Se dispone de 100 ampollitas cuyas duraciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media de 5 horas y varianza de 25. Suponga que al acabarse una ampollita ésta es inmediatamente reemplazada por otra. Sea  $Y$  la variable correspondiente al tiempo que transcurre desde que se prende la primera ampollita hasta que se termina la última.
- (a) (1,5 ptos.) Muestre que  $Y$  tiene valor esperado igual a 500. Con esto, obtenga una cota para la probabilidad de que después de 525 horas aún haya al menos una ampollita funcionando.
  - (b) (1,5 ptos.) Muestre que  $Y$  tiene raíz de la varianza igual a 50. Utilice esto para obtener una cota para la probabilidad de que se acaben las ampollitas entre las horas 400 y 600.
  - (c) (1,5 ptos.) Utilizando el TCL, obtenga una aproximación de la probabilidad de la parte (a).
  - (d) (1,5 ptos.) Suponga que se compran 50 ampollitas adicionales de otra marca, cuyas duraciones son variables aleatorias idénticamente distribuidas con media de 3 horas y varianza 22, independientes entre sí y de las ampollitas anteriores. Si estas ampollitas comienzan a utilizarse cuando se acaban las 100 primeras, ¿cuál es la probabilidad de que después de 700 horas aún haya al menos una ampollita funcionando? Utilice el TCL.

**TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL**



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P[Z > 1] = 0.1587$$

$$P[Z > 1.96] = 0.0250$$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.9885
1.3	0.9668	0.951	0.934	0.918	0.901	0.885	0.869	0.853	0.838	0.823
1.4	0.8088	0.793	0.778	0.764	0.749	0.735	0.721	0.708	0.694	0.681
1.5	0.6668	0.655	0.643	0.630	0.618	0.606	0.594	0.582	0.571	0.559
1.6	0.548	0.537	0.526	0.516	0.505	0.495	0.485	0.475	0.465	0.455
1.7	0.446	0.436	0.427	0.418	0.409	0.401	0.392	0.384	0.375	0.367
1.8	0.359	0.351	0.344	0.336	0.329	0.322	0.314	0.307	0.301	0.294
1.9	0.287	0.281	0.274	0.268	0.262	0.256	0.250	0.244	0.239	0.233
2.0	0.228	0.222	0.217	0.212	0.207	0.202	0.197	0.192	0.188	0.183
2.1	0.179	0.174	0.170	0.166	0.162	0.158	0.154	0.150	0.146	0.143
2.2	0.139	0.136	0.132	0.129	0.125	0.122	0.119	0.116	0.113	0.110
2.3	0.107	0.104	0.102	0.099	0.096	0.094	0.091	0.089	0.087	0.084
2.4	0.082	0.080	0.078	0.075	0.073	0.071	0.069	0.068	0.066	0.064
2.5	0.062	0.060	0.059	0.057	0.055	0.054	0.052	0.051	0.049	0.048
2.6	0.047	0.045	0.044	0.043	0.041	0.040	0.039	0.038	0.037	0.036
2.7	0.035	0.034	0.033	0.032	0.031	0.030	0.029	0.028	0.027	0.026
2.8	0.026	0.025	0.024	0.023	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019
2.9	0.019	0.018	0.018	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.014	0.014
3.0	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.011	0.011	0.011	0.010	0.010

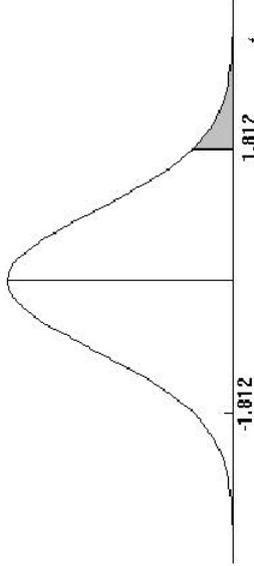
Ejemplo

Para  $\phi = 10$  grados de libertad:

$$P[t > 1.812] = 0.05$$

$$P[t < -1.812] = 0.05$$

Puntos de porcentaje de la distribución t



**TABLA 2: DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT**

$\alpha$	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	636.578
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.689
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.660
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
$\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.575	3.290