Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3
Probabilidades y Estadística
Otoño 2012

Guía ejercicios 3

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

1. Suponga que usted dispone de una mesa cuadrada, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego, usted lanza n objetos al azar sobre la mesa, y denota c_n la cantidad de ellos que cae dentro del círculo. Muestre que la cantidad $4c_n/n$ converge en probabilidad y casi seguramente a π cuando $n \to \infty$.

2. Usted está en una larga fila en un banco. Mientras espera, usted comienza a anotar los tiempos que transcurren entre la llegada de cada cliente al banco, obteniendo una secuencia $X_1, \dots, X_n$ de variables aleatorias. Usted sabe que de acuerdo a la teoría, los (X_i) son variables independientes con ley $\exp(\lambda)$, para un cierto $\lambda > 0$ desconocido que usted quiere aproximar. Sea $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Muestre que $\mathbb{E}(\overline{X}) = 1/\lambda$ y que $\text{var}(\overline{X}) = 1/(n\lambda^2)$.

(b) Ya que $\mathbb{E}(\overline{X}) = 1/\lambda$, usted pretende aproximar λ utilizando el estimador $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$. Muestre que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando $n \to \infty$.

(c) Usted quiere garantizar que con probabilidad alta su estimación tiene un error relativo no mayor que α, es decir, usted quisiera que la cantidad $\mathbb{P}(|\hat{\lambda} - \lambda| > \alpha\lambda)$ fuese pequeña. Para acotar esta probabilidad, primero muestre que $|\hat{\lambda} - \lambda| \le \alpha\lambda$ si y solo si $-\alpha/(\lambda[1+\alpha]) \le \overline{X} - 1/\lambda \le \alpha/(\lambda[1-\alpha])$. Luego concluya que

$$\mathbb{P}(|\hat{\lambda} - \lambda| > \alpha\lambda) \le \mathbb{P}\left(|\overline{X} - 1/\lambda| > \frac{\alpha}{\lambda(1+\alpha)}\right).$$

(d) Muestre que $\mathbb{P}(|\hat{\lambda} - \lambda| > \alpha\lambda) \le (1+\alpha)^2/(n\alpha^2)$.

(e) Utilizando lo anterior, determine cuántas observaciones usted debe tomar para que, con probabilidad de al menos un 90 %, el error relativo de su aproximación sea menor que $\alpha = 25\,\%$.

3. Se sabe que el tiempo medio de espera de la micro es de 5 minutos.

(a) Entregue una cota superior para la probabilidad de que la micro demore más de 15 minutos.

(b) Estudios posteriores publicados por las autoridades de transporte revelan que la raíz de la varianza del tiempo de espera es de 3 minutos. Con esta información adicional, entregue una nueva cota para la probabilidad de la parte anterior.

(c) Usted espera la micro todos los días durante 36 días. Durante la espera, usted escucha la discografía de su grupo favorito, que dura exactamente 168 minutos, siempre retomándola en el instante en que la dejó el día anterior. ¿Cuál es la probabilidad que usted no alcance a terminar la discografía? Utilice el TCL.

4. Un astrónomo quiere conocer la distancia d (en años luz) que hay desde la Tierra a una lejana estrella. Para medir esta distancia el astrónomo dispone un instrumento adecuado, pero debido a variaciones en las condiciones atmosféricas, el valor obtenido en cada medición no corresponde a la distancia exacta, sino a una variable aleatoria con esperanza d y varianza 4. Por esta razón, el astrónomo planea tomar n mediciones independientes, y estimar d usando el promedio. ¿Cuál es el mínimo valor de n tal que, con probabilidad de al menos un 95 %, su estimación tiene un error de a lo más $\pm 0{,}5$ años luz? Obtenga un resultado utilizando la desigualdad de Chebyshev, y otro aproximando con el TCL.

5. El tiempo que transcurre entre cada llamada recibida en una central de atención telefónica sigue una distribución exponencial de parámetro λ desconocido. Se toma una m.a.s. $X_1, \dots, X_n$ de estos tiempos.

(a) Obtenga estimadores para λ usando el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud.

(b) Muestre que estos estimadores convergen casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

6. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. con distribución común Poisson(λ). Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, calcule su esperanza y varianza, y muestre que este estimador es consistente.

7. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una distribución con densidad dada por $f(x) = rx^{r-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, donde $r > 0$ es un parámetro desconocido. Encuentre estimadores para r usando el método de máxima verosimilitud y de los momentos.

8. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una Gamma(θ, λ), donde $\theta > 1$ es conocido.

(a) Muestre que los estimadores de λ del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con $\hat{\lambda} = \theta/\overline{X}$.

(b) Concluya que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

(c) Muestre que la esperanza de $\hat{\lambda}$ es $\lambda n\theta/(n\theta - 1)$ y modifíquelo para obtener un estimador insesgado $\tilde{\lambda}$. Suponiendo $\theta > 2$, calcule la varianza de $\tilde{\lambda}$ y muestre que es un estimador consistente. *Indicación:* utilice el hecho que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución Gamma$(n\theta, \lambda)$.

9. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. con densidad común dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_1$ mediante el método de los momentos.

(b) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_2$ mediante el método de máxima verosimilitud.

(c) Modifique $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ para que sean insesgados.

10. Se lanza una moneda 25 veces, obteniendo la siguiente secuencia:

$$SSCCCSCCSSCSSCCSCCSCSSSCC.$$

Aproximando con el TCL, obtenga un intervalo de confianza para la probabilidad de cara p al 90 %.

11. El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (i.e., la raíz del estimador insesgado de la varianza) es de 50. Asumiendo que el puntaje tiene distribución normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

12. Se desea estudiar la variabilidad de la temperatura mínima diaria (en grados Celsius) durante la primera semana de invierno. Se obtuvieron los datos descritos en la siguiente tabla:

L	M	M	J	V	S	D
5,0	2,4	−1,0	2,6	4,0	−2,0	3,0

Suponiendo que los datos conforman una m.a.s. proveniente de una normal, obtenga un intervalo de confianza para la varianza σ^2 al nivel 90 %.

13. En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26.$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.

14. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con s^2 igual a 0,9.

(a) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

(b) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para σ^2.

(c) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?

(d) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

15. Para una distribución normal con esperanza μ y varianza $\sigma^2 = 25$, se desea realizar un test de las hipótesis $H_0 : \mu = 10$ versus $H_1 : \mu = 5$. Encuentre el tamaño n de la muestra tal que el test más potente tenga $\alpha = \beta = 0{,}025$, donde α y β son la probabilidad del error de tipo I y II, respectivamente.

16. Suponga que Y representa una única observación proveniente de una distribución con densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} \theta y^{\theta-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $\theta_1 > 1$, encuentre la región de rechazo del test más potente a nivel α para la hipótesis nula $\theta = 1$ versus la hipótesis alternativa $\theta = \theta_1$. ¿Es uniformemente más potente? Explique.

17. Un productor afirma que al menos el 20 % del público prefiere su producto. Se toma una muestra de 100 personas para verificar su afirmación. Con $\alpha = 0{,}05$, ¿cuál es la mínima cantidad de personas que prefieren el producto de manera que no haya suficiente evidencia para rechazar la afirmación del productor?

18. Una empresa fabrica ciertas piezas cuyo grosor debería ser de 7cm. Debido a pruebas realizadas sobre la producción, existe la sospecha de que la máquina que produce las piezas esté defectuosa, haciendo que estas tengan un menor grosor del deseado. Suponga que se obtiene una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_{25}$ de los grosores de estas piezas, tal que $\sum X_i = 172{,}508$ y su varianza muestral insesgada es $s^2 = 0{,}04$. Asuma además que el grosor de una pieza es una v.a. normal. Realice un test de hipótesis y calcule el p-valor. Indique su conclusión para un nivel de significación de $\alpha = 5\,\%$.

19. Una conocida marca de alimentos afirma que sus cajas de cereales contienen 50gr de almendras en promedio, pero usted sospecha que contienen estrictamente menos. Para verificar su afirmación, usted cuidadosamente separa las almendras de 9 cajas de cereales, y al pesarlas obtiene 49gr, 51gr, 46gr, 49gr, 51gr, 48gr, 51gr, 46gr y 50gr. Suponga que la variable en consideración tiene distribución normal con ambos parámetros desconocidos.

(a) Calcule el p-valor del test que resuelve su sospecha. Para un nivel de confianza del 5 %, ¿qué se puede concluir?

(b) En la caja de cereales se especifica que la raíz de la varianza de la cantidad de almendras es de 4gr, pero usted nuevamente sospecha que es estrictamente menor. ¿Cuál es el p-valor del test correspondiente? ¿Qué se concluye si se usa un nivel de confianza del 5 %?

20. Se afirma que el 2 % de los conductores olvida su licencia de conducir. Se toma una muestra de 100 conductores, y se observa que todos andan trayendo su licencia.

(a) ¿Cuál es el p-valor del test que contrasta la afirmación con la hipótesis de que menos del 2 % de los conductores olvidan su licencia?

(b) Para $\alpha = 2{,}28\,\%$, ¿cuál es la máxima cantidad de conductores adicionales que traen su licencia tal que la afirmación no se rechaza?