Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Otoño 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta Control 2

P1. (a) Sea X la variable aleatoria del monto de beca asignado. Ésta sólo toma los valores 60, 30, 15 y 0, correspondientes al 100 %, 50 %, 25 % y 0 % de \$60, respectivamente. Luego, X es una variable discreta, por lo cual su esperanza se calcula como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k\in R_X} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= 60\mathbb{P}(X=60)+30\mathbb{P}(X=30)+15\mathbb{P}(X=15)+0\mathbb{P}(X=0)\\ &= 60\mathbb{P}(25\leq Y<50)+30\mathbb{P}(50\leq Y<80)+15\mathbb{P}(80\leq Y<100)\end{aligned}$$

donde Y es la variable aleatoria de ingreso per cápita de la familia, la cual sabemos que se distribuye uniformemente en el intervalo $[25,175]$. Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(X) = 60\cdot\frac{50-25}{150}+30\cdot\frac{80-50}{150}+15\cdot\frac{100-80}{150} = \frac{1}{150}(1500+900+300) = 18.$$

Luego, el valor esperado de la beca asignada es de \$18.

(b) Podemos suponer que las cartas de cada mazo están numeradas de 1 a n. Para cada $i=1,\dots,n$, sea E_i el evento en que la carta i es escogida por A y B. Si X denota la cantidad de cartas que fueron escogidas por ambas personas, es directo que

$$X = \mathbb{1}_{E_1}+\cdots+\mathbb{1}_{E_n},$$

y entonces, por linealidad de la esperanza, se tiene que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_1})+\cdots+\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_n}) = \mathbb{P}(E_1)+\cdots+\mathbb{P}(E_n),$$

donde $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_i})=\mathbb{P}(E_i)$ porque $\mathbb{1}_{E_i}$ es una variable de Bernoulli. Además, E_i ocurre cuando la persona A extrae la carta i (lo cual tiene probabilidad k_A/n) y la persona B también (probabilidad k_B/n), es decir, $\mathbb{P}(E_i)=k_Ak_B/n^2$ para todo i. Obtenemos entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k_Ak_B}{n^2}+\cdots+\frac{k_Ak_B}{n^2} = \frac{k_Ak_B}{n}.$$

P2. (a) Podemos escribir $(U,V)=g(X,Y)$, con $g(x,y)=(x+y,x/y)$. Por el método del jacobiano, la densidad conjunta de U y V viene dada por la fórmula

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|\det Jg^{-1}(u,v)|.$$

Notemos que U y V son variables mayores que 0, pues X e Y lo son. Resolviendo el sistema $(u,v)=(x+y,x/y)$ para x e y, se llega a

$$(x,y) = (\frac{uv}{v+1},\frac{u}{v+1}) = g^{-1}(u,v).$$

Calculemos el jacobiano de esta función:

$$Jg^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\frac{uv}{v+1} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{uv}{v+1} \\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{u}{v+1} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{u}{v+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & \frac{-u}{(v+1)^2} \end{bmatrix},$$

y entonces

$$|\det Jg^{-1}(u,v)| = \left| \frac{-uv}{(v+1)^3} - \frac{u}{(v+1)^3} \right| = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

Además, como X e Y son independientes, la densidad conjunta es el producto de sus densidades marginales:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) e^{-y} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Utilizando todo lo anterior, tenemos que:

$$f_{U,V} = \frac{ue^{-\frac{u}{v+1}}}{(v+1)^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{uv}{v+1}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(\frac{u}{v+1}).$$

La segunda indicatriz vale 1 para cualquier par de valores (u,v) mayores que 0. Para que la primera indicatriz valga 1 debe cumplirse que $0 \leq \frac{uv}{v+1} \leq 1$, lo cual ocurre (para $u, v > 0$) si y sólo si $u \leq 1 + 1/v$. Por lo tanto:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{ue^{-u/(v+1)}}{(v+1)^2} & \text{si } 0 < u \leq 1 + 1/v \text{ y } 0 < v \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) Siguiendo la indicación, condicionemos en los posibles resultados de U utilizando la regla de probabilidades totales en su versión continua:

$$p_X(i) = \mathbb{P}(X = i) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = i \mid U = p) f_U(p) dp = \int_0^1 \mathbb{P}(X = i \mid U = p) dp,$$

donde hemos utilizado el hecho que $f_U(p) = \mathbb{1}_{[0,1]}(p)$. Notemos que cuando $U = p$, la variable X tiene distribución $\text{bin}(n,p)$, con lo cual se tiene $\mathbb{P}(X = i \mid U = p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$. Obtenemos:

$$p_X(i) = \binom{n}{i} \int_0^1 p^i (1-p)^{n-i} dp = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},$$

como deseábamos.

P3. (a) Para calcular $f_X(x)$, partimos por $F_X(x)$ y después derivamos:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(x)) = \int_{-\infty}^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy,$$

donde hemos utilizado que $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Derivando lo anterior con respecto a x y aplicando el TFC y la regla de la cadena, obtenemos:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{x}.$$

Lo anterior vale para $x > 0$, mientras que para $x \leq 0$ se tiene que $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$, pues $X = e^Y$ es una variable positiva; luego $f_X(x) = 0$ para $x \leq 0$. Juntando todo esto, tenemos:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(b) Recordemos que como $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, su f.g.m. es $M_Y(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$. Utilizando esto, se tiene que:

$$\mathbb{E}(X^s) = \mathbb{E}(e^{\ln(X^s)}) = \mathbb{E}(e^{sY}) = M_Y(s) = e^{\mu s + \sigma^2 s^2/2}.$$

Con esto, evaluando en $s = 1$ obtenemos directamente la esperanza de X:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^1) = e^{\mu + \sigma^2/2}.$$

Para obtener la varianza de X, utilizamos $s = 2$ y el valor de la esperanza:

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = e^{2\mu + 2^2\sigma^2/2} - (e^{\mu+\sigma^2/2})^2 = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}.$$

(c) Calculemos $M_X(t)$ para $t > 0$:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $y = ln(x)$, de modo que $dy = dx/x$. Obtenemos:

$$M_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{te^y} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Notemos que el exponente del integrando es $te^y - (y-\mu)^2/2\sigma^2$, el cual diverge a ∞ cuando $y \to \infty$ (si $t > 0$). Por lo tanto, la integral no converge en ∞, lo que hace que $M_X(t)$ no esté definido para $t > 0$.

(d) Calculemos la acumulada de $V = \alpha + \beta U$ y posteriormente derivemos. Supongamos primero que $\beta > 0$:

$$F_V(v) = \mathbb{P}(\alpha + \beta U \leq v) = \mathbb{P}(U \leq \frac{v-\alpha}{\beta}) = \int_{-\infty}^{\frac{v-\alpha}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Derivando con respecto a v y aplicando el TFC y la regla de la cadena, obtenemos:

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{v-\alpha}{\beta}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma} e^{-\frac{(v-[\alpha+\beta\mu])^2}{2\beta^2\sigma^2}},$$

lo cual corresponde justamente a la densidad de una variable $\mathcal{N}(\alpha + \beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. El caso $\beta < 0$ es similar:

$$F_V(v) = \mathbb{P}(\alpha + \beta U \leq v) = \mathbb{P}(U \geq \frac{v-\alpha}{\beta}) = \int_{\frac{v-\alpha}{\beta}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du,$$

y al derivar se obtiene:

$$f_V(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{v-\alpha}{\beta}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\beta)\sigma} e^{-\frac{(v-[\alpha+\beta\mu])^2}{2\beta^2\sigma^2}},$$

lo cual nuevamente coincide con la densidad de una $\mathcal{N}(\alpha+\beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. Utilicemos este hecho para obtener la distribución de $Z = aX^b$: notemos que $W = \ln(Z) = \ln(a) + b\ln(X) = \ln(a) + bY$. Aplicando lo anterior con $\alpha = \ln(a)$ y $\beta = b$, se concluye que $W = \ln(Z)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\ln(a) + b\mu, b^2\sigma^2)$. Por definición, esto significa que Z tiene distribución log-normal con parámetros $\ln(a) + b\mu$ y $b^2\sigma^2$.

(e) Si anotamos $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$, por definición de distribución log-normal sabemos que $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que $Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$; además Y_1 e Y_2 son independientes pues X_1 y X_2 lo son. Además, notemos que $W = \ln(Z) = \ln(X_1 X_2) = \ln(X_1) + \ln(X_2) = Y_1 + Y_2$, es decir, W es suma de dos normales independientes. Por teorema visto en clases, se tiene entonces que $W = \ln(Z) \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Es decir, Z tiene distribución log-normal de parámetros $\mu_1 + \mu_2$ y $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.