Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Otoño 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Control 2

7 de mayo de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. (a) (3,0 ptos.) El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100 % de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50 % de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna un 25 %. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo $[\$25, \$175]$.

(b) (3,0 ptos.) Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo (sin reposición en ambos casos). Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las escogidas por A y por B es $(k_A k_B)/n$. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y use linealidad de la esperanza.

P2. (a) (3,0 ptos.) Sean $X \sim \text{unif}(0,1)$, $Y \sim \exp(1)$ variables independientes. Sean $U = X + Y$, $V = \frac{X}{Y}$. Muestre que

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{ue^{-u/(v+1)}}{(v+1)^2} & \text{si } 0 < u \leq 1 + 1/v \text{ y } 0 < v \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) (3,0 ptos.) Se lanza n veces de manera independiente una moneda con probabilidad p de cara, donde p es el resultado de la realización de otra variable aleatoria U con distribución $\text{unif}(0,1)$, independiente de los lanzamientos. Sea X la cantidad de caras que se obtienen. Demuestre que para todo $i = 0, \dots, n$ se tiene que $p_X(i) = \frac{1}{n+1}$. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ condicionando en los posibles resultados de U; utilice sin demostrar el hecho que

$$\int_0^1 p^i (1-p)^{n-i} dp = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}.$$

P3. Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) (1,2 ptos.) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(b) (1,2 ptos.) Pruebe que para todo $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X^s) = e^{\mu s + \sigma^2 s^2/2}$. Obtenga la esperanza y varianza de X. *Indicación:* utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(c) (1,2 ptos.) Pruebe que la f.g.m. $M_X(t)$ no está definida para $t > 0$.

(d) (1,2 ptos.) Sea $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Pruebe que $V = \alpha + \beta U$ tiene distribución $\mathcal{N}(\alpha + \beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. Utilice esto para obtener la distribución de aX^b, donde $a > 0$ y $b \neq 0$.

(e) (1,2 ptos.) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con distribución log-normal de parámetros μ_1, σ_1^2 y μ_2, σ_2^2, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de $Z = X_1 X_2$?