Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniera Matemática
19 de Abril de 2011

Auxiliar 4 MA3403: Variables Aleatorias Contínuas y Esperanza

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Francisco Castro, Alfredo Torrico.

P1. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ C - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde C es una constante.

(a) Muestre que $C = 1$.

(b) Calcule la función de distribución acumulada de X.

(c) Muestre que la variable aleatoria $Y = |X|$ es uniforme en el intervalo [0,1].

P2. Sean $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$, independientes. Sea $Y = \text{mín}\{X_1, X_2\}$. Calcule la función de densidad de Y.

P3. Sea $X \sim exp(\lambda)$, es decir,

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k)$, con $k \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que X posee la propiedad de pérdida de memoria, es decir,

$$\forall t, s > 0 \quad \mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

P4. Sea $X \sim Binomial(n, p)$. Muestre que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

P5. Dé un ejemplo de variable aleatoria discreta con esperanza infinita.

P6. Suponga que un haz de luz (de una linterna) se hace girar alrededor de su centro, que se encuentra en la coordenada (0,1). Cuando la linterna ha dejado de girar, se denotará a X la variable aleatoria que describe la coordenada de la intersección del haz con el eje x. Si el haz no está apuntando hacia el eje x, se repite el experimento). El punto X está determinado por el ángulo θ que se forma entre la linterna y el eje y, que a partir de la experiencia física parece estar distribuido uniformemente entre $\pi/2$ y $-\pi/2$. Determine la función de densidad de X, y explique por qué no tiene esperanza.

P7. Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. **Indicación:** defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

Extra

P8. Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias iid que distribuyen $Geometrica(p)$.

(a) Demuestre que $X_1 + \cdots + X_k \sim BN(k, p)$.

(b) Calcule la esperanza y varianza de la distribución $BN(k, p)$.